

Vzorové riešenia 1. série zimnej časti

Príklad 1.1 ♥ 7, T (opravoval Mišo Frankie Hanula)

Pre začiatok si skúsime uvedomiť zopár základných vecí. Je dobré vedieť, že Mesiac je k Zemi otočený stále rovnako (čo znamená, že sa naň lano nebude navíjať). Za každých 28 dní Mesiac navinie na zem jeden rovník, teda 40000 km lana. Celé lano sa teda namotá za $384000/40000 \cdot 28 = 268,8$ dňa. Toto riešenie mala väčšina ľudí. Dúfajme, že budú so svojim bodom spokojní.

Je dobré vedieť, že Zem sa otočí okolo svojej osi raz za deň. Každý deň na seba teda navinie 40000 km lana. Celé lano sa teda navinie za $384000/40000 = 9,6$ dňa.

Toto riešenie malo tých pár ľudí, ktorí dostali 5 bodov.

Je dobré vedieť aj to, že Mesiac sa točí a obieha rovnakým smerom ako Zem.

Každý deň sa vďaka tomu jedna dvadsaťosmina lana, ktorú na seba Zem s námahou navinula odvinie a vyjde nám trochu dlhší čas (konkrétne o jednu dvadsaťsedminu, veď si to spočítajte). Takéto riešenie mal jeden človek, dostal 5 bodov a malé bezvýznamné plus.

Bodovanie: pozri text.

Príklad 1.2 ♥ 7, 8, 9, T, K (opravoval Andrej Vojtko)

Čaute všetci! Toto bol v podstate jednoduchý príklad a boli približne dva spôsoby riešenia. Prvý (ktorý použila väčšina z vás) bol taký, že sme si vypočítali, koľko princeznej trvá prejsť jedno poschodie (tu sa mala použiť rovnica $v = s/t$, aj keď ju všetci použili, iba málokto ju napísal). Nebudem rozoberať úplné riešenie. Vyšlo to 3 sekundy (čas na prechod jedným odpočívadlom a 20 schodov). Týmto sme predelili čas, ktorý bol treba na výstup celej veže, a vyšlo nám 8. Teda veža má osem poschodí. Výšku schodu sme vypočítali tak, že sme predelili výšku veže (24 m) počtom schodov (medzi každými poschodiami ich je 20, poschodí je 8, takže $20 \cdot 8 = 160$), a už to máme, je to 0,15 m = 15 cm. Druhý spôsob je ten, že sme si vypočítali čas na odpočívadle a na jednom schodišti. Kreslili sme to do obrázku až sme došli k číslu 24, teda celkovému času na zbehnutie veže. Tu bol jeden problém, či začať odspodu schodmi, alebo odpočívadlom. Bolo to úplne jedno, lebo na každom poschodí malo byť odpočívadlo, čo znamená, že za poschodie sme mohli považovať odpočívadlo. A tých bolo v obidvoch prípadoch 8. A teraz prejdeme k chybám, ktoré ste robili. Najčastejšie Vám chýbala rovnica $v = s/t$, podľa ktorej sa v tomto prípade všetko dôležité počítalo. Keďže boli výpočty viac-menej jasné, tak som to prehliadal a nestíhal som za to žiadne body. Ďalšia chyba bola v tom, že ste nepísali komentáre k riešeniu.

Za nedostatočný komentár som stíhal veľkoryso iba 0,5 bodu. Za čisto iba výsledok som dával 3 body (obidva a správne výsledky ☺). Za každú numerickú chybu 0,1 bodu dolu. Za jeden správny výsledok s komentárom 2,5. Za obidva nesprávne výsledky som prideloval body podľa snahy, chýb ktoré ste urobili, a podľa vlastného uváženia. A nakoniec by som sa chcel pozastaviť pri tom, že niektorí nepochopili, resp. poriadne si neprečítali zadania, takže čítajte poriadne a POČÍTajte S NAMI!!!

Príklad 1.3 ♥ 7, 8, 9, T, K (opravoval Peťo Pitkin Beňa)

Príklad sa dá riešiť viacerými spôsobmi a vždy nám vyjde rovnaký výsledok – rýchlosť nevypočítame, ale môžeme Popolvárovi poradiť, ako odmerať čas, ktorý tak potrebuje. Upravme si najprv jednotky. 1 míľa = 5280 stôp, preto 7 míľ/h = 36 960 stôp/h a 14 míľ/h = 73 920 stôp/h. Dĺžka vlaku je 48.25 = 1200 stôp. Môžeme postupovať rôzne.

1. Pomalší koberec poletí z prvého vagónu k poslednému a rýchlejší z posledného k prvému. Koberec sa približujú vzájomnou rýchlosťou 36 960 + 73 920 = 110 880 stôp/h. Stretnú sa za $t = s/v = 1200 / 110 880 = 0,0108$ h (38,96 s). Keby vlak stál, stretli by sa v tretine vlaku, teda 1200 / 3 = 400 stôp od začiatku (1/3 9. vagónu). Miesto kde sa stretnú, je vzdialené od tretiny vlaku o x stôp, ktoré vlak za 39 s prešiel a teda rýchlosť vlaku je $v = s / t$, teda $v = x / 39$ stôp/s = $3600x / 5280 \cdot 39$ míľ/h.

2. spôsob je jednoduchý. Keď vlak prejde okolo stromu, Popolvár vyletí z posledného vagónu a k stromu prileť za $1200 / 73 920 = 0,1623$ h (58,44 s). Vlak zatiaľ prejde x stôp. Dopocítame ako v predošlom prípade.

3. Z posledného vozňa vyletia oba koberec. Kým prileť rýchlejší na začiatok vlaku, vlak prejde x stôp, rýchlejší koberec preletí $1200 + x$ stôp a pomalší polovicu z toho čo rýchlejší teda $600 + x/2$ stôp. Vlak predbehol pomalší o $600 + x/2 - x$ stôp, teda o $600 - x/2$ stôp. Keby vlak stál, priletel by koberec do stredu vlaku. Vzdialenosť $x/2$ stôp je vzdialenosť stredu vlaku od miesta, nad ktorým sa koberec nachádzal. Vypočítame vzdialenosť x a zistíme akú dráhu preleteli koberec. Zistíme čas a získame rýchlosť vlaku.

4. Popolvár sadne na koberec, odletí rýchlo preč a pomalý vlak ho už nezaujima.

Hodnotenie: Za správne prevody jednotiek 1 bod, pri použití dĺžky vlaku pri výpočtoch 1 bod, pri uvažovaní o vzájomnej rýchlosti vlaku a kobercov 1 bod, za spôsob akým ste riešili 2 body. Ak ste napísali, že rýchlosť sa vypočítať nedá 2 body, ak ste zdôvodnili prečo sa to nedá, čo vám chýba a kedy by sa to vypočítať dalo, až 5 bodov.

Príklad 1.4 ♥ 8, 9, K (opravovala Ad'a Tinajová)

Najprv bolo treba premeniť jednotky, najlepšie na základné:

$\rho_{\text{vody}} = 1 \text{ kg/l} = 1000 \text{ kg/m}^3$; $\rho_{\text{slanej vody}} = 1,1 \text{ kg/l} = 1100 \text{ kg/m}^3$; $V_{\text{veľryby}} = 80 \text{ m}^3$

Keďže veľryba si pred zjedením plachetnice veselo plávala v jazernej vode, t.j. **vznášala** sa v nej, jej hustota a hustota kvapaliny, v ktorej plávala boli **rovnaké (lebo $F_{\text{vz}} = F_g$)**. Čiže hmotnosť samotnej veľryby si môžeme vypočítať takto: $m_v = V_v \cdot \rho_{\text{vody}} = 80 \cdot 1000 = 80000 \text{ kg}$.

Po tom, ako veľryba zhltna plachetnicu s posádkou, sa **vznášala** v slanej vode, čiže jej hustota bola teraz **rovnaká** ako hustota slanej vody, pričom jej objem sa nezmenil. Hmotnosť veľryby s posádkou teda vypočítame takto: $m_v + p = V_v \cdot \rho_{\text{slanej vody}} = 80 \cdot 1100 = 88000 \text{ kg}$.

Hmotnosť lode s posádkou získame tak, že od hmotnosti veľryby s posádkou odčítame hmotnosť veľryby bez posádky: $m_p = m_v + p - m_v = 88000 - 80000 = 8000 \text{ kg}$.

Hmotnosť lode s posádkou bola 8000kg.

Bodovanie: poznatok, že veľryba sa vznáša, t.j. $F_g = F_{\text{vz}}$, t.j. $\rho_{\text{vody}} = \rho_{\text{veľryby}}$ bol základný - 1,5 bod, postup - 1,5 bodu, premenenie jednotiek - 0,5 bodu, vzorec - 1 bod, výsledok - 0,5 bodu. Vaša Ad'a

Príklad 1.5 ♥ 7, T (opravoval Martin Logik Lauko)

Tento príklad nebol zložitý, asi aj preto dopadol celkom dobre. Najväčšími problémami bol **chýbajúci slovný komentár** k riešeniu (keď delím nejaké dve čísla, napíšem aj prečo a čo získam ako podiel) a **chýbajúci vzorec**, podľa ktorého ste počítali. Vyskytli sa dve verzie správneho riešenia:

1. Zlata bolo 14,6 mld. Sk, a keďže 40 Sk = 1 dolár (USD), tak cena zlata 14 600 000 000/40 = 365 000 000 USD. Keď toto číslo vydáme cenou 1 unce zlata (350 USD), dostaneme počet uncí - $365 000 000/350 = 1 042 857$ uncí (po zaokrúhlení). Vieme, že 32,15 uncí je 1 kg, potom 1 042 857 uncí má hmotnosť $m = (1 042 857 / 32,15) \text{ kg} = 32437,2 \text{ kg}$.

2. Vypočítali sme, že 1 kg zlata má hodnotu 350 USD/unca .32,15 uncí/kg .40 Sk/USD = 450 100 Sk/kg. Pokiaľ sumu 14,6 mld. Vydáme touto čiastkou, dostaneme množstvo zlata v kg: $m = 14 600 000 000 / 450 = 32437,2 \text{ kg}$ zlata.

Obe možnosti už pokračujú rovnako: zo základného vzťahu $m = V \cdot \rho$ (kde m je hmotnosť, V objem a ρ hustota) nám platí $V = m / \rho$, zo zadania $\rho = 19,3 \text{ g/cm}^3 = 19 300 \text{ kg/m}^3$ (prevod na základné jednotky!), potom po dosadení dostávame $V = 1,68 \text{ m}^3$, čo je náš hľadaný objem zlata Národnej Banky Slovenska.

Bodovanie: za výpočet a prevod hmotnosti zlata na kg 1,5 bodu, za vzorec 0,5 bodu, za výpočet objemu 1 b a za správny výsledok 1 b. Za slovný komentár k riešeniu (prečo ste počítali čo ste počítali) som dával 0,5 až 1 bod. Za používanie zlých jednotiek išlo 0,2 bodu dolu a za výpočtovú či inú malú chybu ste mohli mať tiež o pol bodu menej.

Príklad 1.6 ♥ 9 (opravovala Baška Trubenová)

Volám sa Zelená Socha a som veštica. Chcela by som vám predviesť svoju výnimočnosť a prezradiť vám správne riešenie príkladu o mne a mojich sestrách. Pozorne čítajte, hlboká pravda sa skrýva v nasledujúcich riadkoch.

Najprv si treba uvedomiť, že keď nás vyťahovali, zachytili nás v páse - strede - v našom ťažisku. Aj keby nie, toto je najdôležitejší bod, v ktorom si môžeme predstaviť, že sila pôsobila. V tomto bode na nás pôsobili silou $F_g = m \cdot g = 1000 \cdot 10 = 10\,000\text{N}$. Moja červená sestra na palube stála, jej ťažisko bolo teda $5/2 = 2,5\text{ m}$ nad loďou. Keď ju vytiahli na breh, znova stála, zas mala ťažisko $2,5\text{ m}$ nad mólom. Keďže mól je o 10 m vyššie ako loď, dráha, po ktorej silou pôsobili, je $s_1 = 10\text{ m}$. Vykonali teda prácu $W_1 = m \cdot s_1 = 10\,000 \cdot 10 = 100\text{ kJ}$. Podobne to bolo aj s mojou modrou sestrou. Tá ležala na lodi aj na palube (chúďa, necíti sa už pár dní dobre...), ťažisko mala teda tesne nad loďou i nad mólom. Silou teda pôsobili tiež po dráhe 10 m , a teda tiež vykonali prácu $W_2 = 100\text{ kJ}$. Ja som však taká výnimočná socha a chcela som tým úbohým ľuďom nejakú pomoc. Na lodi som stála, mala ťažisko $2,5\text{ m}$ nad loďou, no na môle som ležala, mala ho teda tesne pri môle. Preto keď ma vyťahovali, stačilo, že vytiahli moje ťažisko o $10 - 2,5 = 7,5\text{ m}$. Pri otáčaní do vodorovnej polohy nepotrebovali žiadnu prácu, lebo ťažisko zostávalo na mieste. Pri mne teda vykonali prácu len $W_3 = 10\,000 \cdot 7,5 = 75\text{ kJ}$. Ale som výnimočná, že?!

Bodovanie: Ak ste si mysleli, že som taká priemerná socha, získali ste 3,5 b. Ak niekto odhalil moju výnimočnosť, no nepodarilo sa mu správne vypočítať prácu, získal o 0,5 bodu viac. Za správne riešenie bolo 5 bodov, samozrejme, len ak ste mi to pekne vysvetlili. Naopak, ak vám chýbal popis riešenia alebo bol nedostatočný, tak išli nejaké tie bodíky dole...

Príklad 1.7 ♥ 7, 8, T, K (opravoval Paľo dk Dravecký)

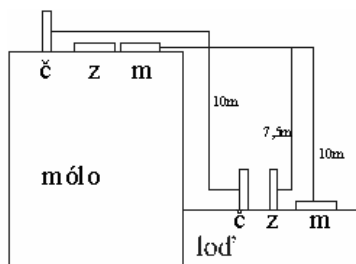
Milí moji, správnych riešení tejto úlohy bolo veľa. Prvá, ktorá mi zišla na um bolo zostavenie dvoch rovníc o dvoch neznámych (x pre objem zlata v druhej korune, y pre olovo). Jedna by hovorila o objeme, druhá o hmotnosti. Túto sústavu by sme vyriešili a úloha by bola hotová. Sem chcem však uviesť možno krajší, možno rýchlejší spôsob.

Platí $V = m/\rho$ (V objem, m váha, ρ hustota). Tak si vyrátam objem 1 g zlata ($V_z = 1/19,3$) a objem 1 g olova ($V_o = 1/11,4$). Keď z koruny odoberiem 1 g zlata a nahradím ho 1 g olova, váha sa nezmení, no objem koruny sa zväčší o $(-V_z + V_o = 7,9/220,02)$. Aby som vedel, koľko gramov treba takto nahradiť, vydělím pridaný objem (237 cm^3) týmto prídavkom objemu na 1 g ($7,9/220,02$). Akoby som hovoril: koľko krát musím vymeniť gram zlata za gram olova, aby som zväčšil korunu o 237 cm^3 ? Teda $237/(7,9/220,02) = 237 \cdot 220,02/7,9 = 6600,6$. Toto je počet gramov olova v korune (pretože toľkokrát som zamenil zlato za olovo), a množstvo zlata si vyjadrím ľahko $11001 - 6600,6 = 4400,4\text{ g}$. Toto zodpovedá objemu $V_o = 6600,6 / 11,4 = 579\text{ cm}^3$ olova a $V_z = 4400,4/19,3 = 228\text{ cm}^3$ zlata. Hurá :-)

Bodoval som nasledovne: za rozumný postup 0-3 body, za zrozumiteľnosť riešenia 0-1,5 bodu a za správny výsledok 0,5 bodu.

Príklad 1.8 ♥ 8, 9, K (opravovala Majka Hanulová)

a) Čierny balónik zohrievaný na slnku unesie napríklad pero, lízanku, kúsok drôtu, papier A4, kovové spinky, baterku AA. Niektorí z vás zohrievali balón aj teplou vodou, fénom alebo infračervenou lampou. A prečo sa lieta? Balónik sa zohrieva, a tým zväčšuje svoj objem. Jeho hmotnosť pritom ostáva rovnaká, takže sa mení jeho hustota. Keď sa pozrieme na vzťah $\rho = m/V$, zistíme, že hustota sa pritom znižuje. A ako sa balónik nafukuje, jeho hustota klesne pod hustotu okolitého vzduchu a balón sa vďaka vztlakovej sile vzduchu začne vznášať. Prečo mal byť balón čierny? Čierna farba v porovnaní s bledšími farbami pohltí viac z tepla, ktoré na ňu dopadne. Tepl



je podobné svetlu. Svetlo je po dopade na predmet čiastočne pohltené a čiastočne odrazené. Odrazené svetlo vidíme ako farbu predmetu. Čierne veci odrážajú najmenej a najviac pohlcujú. Niektorí z vás nenapísali nič o výsledkoch svojho pokusu, teda nič o tom, čo balón uniesol. Ak sa v zadaní vyskytujú slová "vyskúšaj" alebo "otestuj" a podobne, očakávame od vás, že pokus naozaj vyskúšate, a že o tom do riešenia niečo napíšete. Napríklad aj to, že sa pokus nepodaril, no v tom prípade treba napísať prečo.

b) Prečo sa balónik na slamke ponáraný do vody prestane sfukovať? Najprv odpovieme na otázku, prečo sa balón sfukuje. Nuž preto, lebo zvonka na balón tlačí atmosférický tlak. Okrem toho, keď sme balón nafúkli, rozťahli sme gumu, z ktorej je balón vyrobený. Guma je elastická, to znamená, že sa vždy vráti do pôvodného tvaru, ak ju necháme. Na vzduch v balóne teda tlačí okolitý vzduch a ešte aj sťahujúca sa balónová guma, a tlačia ho cez slamku von. Ak slamku ponárame do vody, pôsobí cez ňu na vzduch v balóne stále väčší tlak vody a navyše atmosférický tlak, ktorý pôsobí na hladinu vody. Keď sa tlak zvnútra balóna vyrovná s tlakom zvonka (tým, ktorý pôsobí cez slamku), balón sa prestane sfukovať. Ak potom pomaly dvíhate slamku z vody, ešte z nej cestou niekoľko bubliniek vzduchu unikne – teda je jasné, že balón ešte nevyfúchal úplne. Samozrejme, len ak ste stihli slamku ponoriť dosť hlboko.

c) Tu sa udeje to, na čo treba vynaložiť menej námahy. Nafukovanie balóna je na začiatku ťažšie – vtedy sa guma ťažko nafúkuje. Podľa toho, ako veľmi sú oba balóny nafúkané, sa bude správať vzduch v nich. Ak je jeden nafúkaný príliš málo, takže ešte stále treba na natiahnutie gumy prekonať dosť veľký odpor, pretečie vzduch z menšieho balóna do väčšieho. Je totiž jednoduchšie rozťahnúť veľký balón ako malý. Ak sú oba balóny nafúkané dosť, pretečie vzduch z väčšieho do menšieho. Guma väčšieho balóna má väčšiu snahu vrátiť sa do pôvodnej polohy, pretože je viac natiahnutá. Ak sú balóny nafúkané približne rovnako, nestane sa nič. Rozdiel je príliš malý na to, aby sa to celé pohlo. Pretlačiť vzduch cez úzku slamku si totiž tiež vyžaduje určitú námahu.

Bodovanie: za to, že ste neurobili jeden z pokusov, alebo nenapísali o jeho výsledkoch, som strhávala 1b; za nedostatočné vysvetlenie do 1b.