

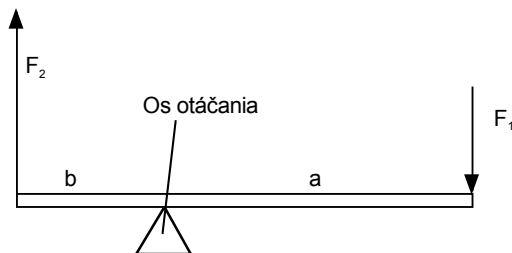
Vzorové riešenia 1. série zimnej časti

Príklad 1 - Kliešte *opravoval Michal Smolík - Zerg*

Najskôr si povedzme, ako fungujú kliešte. Ak zatlačím na hornú rúčku smerom nadol, dolná čeľusť (tá časť klieští, ktorá má strihať) sa pohne hore a ak zatlačím na dolnú rúčku smerom nahor, tak sa horná čeľusť pohne nadol. Ak stlačím rúčky k sebe, aj čeľuste sa tlačia.

Teda kliešte sú vlastne dve páky, ktoré majú rovnakú os otáčania, ktorá je medzi rúčkami a čeľuštami.

Páky majú tú vlastnosť, že znásobujú silu, ktorou pôsobíme. Aby som to vysvetlil, nakreslím obrázok:



F_1 je sila, ktorou tlačím na páku, F_2 je sila, ktorou páka tlačí na predmet. F_2 sa zväčšuje pomerom $a : b$. Pre páku platí vzorec

$$a \cdot F_1 = b \cdot F_2$$

tento vzorec si viem upraviť na

$$\frac{F_1 \cdot a}{b} = F_2$$

a z tohto upraveného vzorca vidím, že F_2 je tým väčšia, čím je b menšie.

A aby som sa vrátil ku klieštom, tak ako som hovoril, sú to dve páky tlačiace oproti sebe. A ak dám do klieští drôt, blízko k osi otáčania tak sa mi zmenší vzdialenosť b a teda sa mi sila F_2 ktorá drôt krája zväčší.

Teda ak dám drôt čo najbližšie k osi otáčania, sila ktorá naň bude pôsobiť, bude najväčší možný násobok sily ktorou pôsobím. Teda na prestrihnutie drôtu mi bude stačiť menšia sila.

Bodovanie: 1 b za správne riešenie (že najbližšie k osi pôsobí najväčšia sila), 3 b za dôkaz riešenia (napísanie vzťahu medzi silou a vzdialenosťou drôtu od osi otáčania), 1 b za dôkaz platnosti vzťahu (kľešte sú vlastne páky, alebo iné odôvodnenie).

Príklad 2 - Zmeškaný autobus opravovala Zuzana Bogárová - Bum

Na začiatok, najlepšia vec akú môžeme urobiť je, vypísať si čo vieme zo zadania a pomenovať si to.

Poznáme vzdialenosti medzi zastávkami. K prvej zastávke S je to 2,5 km. Túto vzdialenosť si pomenujeme s_1 . K ďalšej zastávke T je to 2,1 km. Vzdialenosť od zastávky S k zastávke T si pomenujeme s_2 . Poznáme rýchlosť autobusu, a to $v_a = 35 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ a vieme aj, aký čas trvá Paťovi a Lucke, aby sa dostali skratkou k zastávke T, a to je $t = 12$ min. Teraz môžeme ísť počítať, aký čas t_S sa musí autobus zdržať na zastávke S aby ho súrodenci stihli.

Prvý a najdôležitejší poznatok je, že keďže Lucka a Paťo sa dostanú na zastávku T za 12 minút, autobusu to musí trvať tiež aspoň 12 minút. Celkovú dráhu s , ktorú autobus musí prejsť poznáme. To je súčet vzdialenosti k prvej zastávke S s_1 a vzdialenosti k ďalšej zastávke T s_2 . $s_1 = 2,5$ km a $s_2 = 2,1$ km. Z toho vyplýva, že celková dráha je $s = 2,5$ km + 2,1 km = 4,6 km. Autobus, ktorý ide rýchlosťou $v_a = 35 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ musí prejsť dráhu $s = 4,6$ km. To, ako dlho mu to trvá spočítam podľa známeho vzorca $t = \frac{s}{v}$.

$$t_a = s/v_a = \frac{4,6 \text{ km}}{35 \frac{\text{km}}{\text{h}}} \doteq 0,13 \text{ hod}$$

Premením si to na minúty, aby sa mi to ľahko porovnávalo s časom t , ktorý potrebujú Paťo a Lucka, aby sa dostali na zastávku T. $t = 0,13$ hod $\doteq 7,89$ min. Teraz vidím, že ak sa autobus nikde nezdrží, bude na zastávke T za čas 7,89 minúty, a to je skôr, ako súrodenci, a oni ho nestihnú. Keďže autobus sa na zastávke S zdrží, čas, ktorý tam bude, si pomenujem t_S , a idem ho zistiť.

Čas Paťa a Lucky, za ktorý budú na zastávke T je $t = 12$ min, a autobus bez zdržania tam bude za $t_a = 7,89$ min. Na začiatku sme si povedali, že aby ho stihli, musí mu to trvať tak dlho na zastávku T, ako im. A to je 12 minút. Ak chcem zistiť, aký čas t_S sa musí autobus zdržať, stačí, keď odpočítam od 12 minút čas t_a . To je $t_S = 12 \text{ min} - t_a = 12 \text{ min} - 7,89 \text{ min} = 4,11$ min,

Vďaka tomuto výpočtu už viem, že autobus sa musí na zastávke S zdržať aspoň 4,11 minút, aby ho súrodenci stihli.

Bodovanie: Za pomenovanie jednotlivých veličín 0,5 b, vysvetlenie, prečo sme tak počítali 0,5 b a za výpočet a správny výsledok 3,5 b.

Príklad 3 - Krokodíl s očami *opravoval Matej Duník - M@tt*

Predstavme si, že už nastala tá situácia, že krokodílovi trčia len oči (ten horný kváder) a zvyšok tela (ten spodný kváder) má ponorený. Objem ponorenej časti krokodíla je objem veľkého kvádra, čiže $V_{\text{telo}} = 1,5 \text{ m}^3$. Vieme teda, že naň pôsobí vztlaková sila $F_{\text{vz}} = V_{\text{telo}} \cdot \rho_{\text{v}} \cdot g$, kde ρ_{v} je hustota vody a g je gravitačné zrýchlenie. Gravitačná sila, ktorá naňho pôsobí v opačnom smere musí byť rovnaká ako vztlaková, aby ich výslednica bola nulová. Ak by výslednica nebola nulová, tak by sa predsa začal pohybovať nadol (ponárať sa) alebo nahor (vynárať sa). Ako tú gravitačnú silu spočítame? Jej veľkosť závisí od hmotnosti krokodíla $m_{\text{krokodil}} = (V_{\text{telo}} + V_{\text{oci}}) \cdot \rho_{\text{krokodil}}$ a od hmotnosti kameňov m_{kamene} . Čiže dostávame:

$$\begin{aligned}F_G &= F_{\text{vz}} \\(m_{\text{krokodil}} + m_{\text{kamene}}) \cdot g &= V_{\text{telo}} \cdot \rho_{\text{v}} \cdot g \\(V_{\text{telo}} + V_{\text{oci}}) \cdot \rho_{\text{krokodil}} + m_{\text{kamene}} &= V_{\text{telo}} \cdot \rho_{\text{v}} \\m_{\text{kamene}} &= V_{\text{telo}} \cdot \rho_{\text{v}} - (V_{\text{telo}} + V_{\text{oci}}) \cdot \rho_{\text{krokodil}} = \\m_{\text{kamene}} &= 1,5 \text{ m}^3 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - (1,5 \text{ m}^3 + 0,05 \text{ m}^3) \cdot 960 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 12 \text{ kg}\end{aligned}$$

Najčastejšia chyba bola, že ste chceli, aby sa telo vznášalo vo vode, teda aby malo hustotu rovnakú ako má voda. Áno, to by bolo správne riešenie, ak by oči mali nulovú hmotnosť. Ale keďže ju majú nenulovú, budú telo tlačiť dole a chudák krokodíl bude mať ponorené celé telo a ešte aj väčšinu hlavy. Takto vám vyšlo 60 kg, čo je zjavne nesprávny výsledok.

Bodovanie: *Za nedostatočný slovný komentár som výnimočne strhával maximálne 1 b. Prosím píšete ho, nech viem, na čo myslíte. Za výsledok 60 kg ste mohli dostať maximálne 3,5 b.*

Príklad 4 - Lámanie špagiet *opravoval Augustin Židek*

Hned na začiatku vzoráku mám pro vás varování. Na tento príklad neexistuje jedna správna číselná odpoveď, a to hned z niekoľika dôvodů. Jednak proto, že špagety jsou dvojího typu — vaječné a bezvaječné a každé mají trochu jiné vlastnosti. Dalšími problémy jsou výrobce (každý si dělá špagety trochu jinak), použité suroviny (pšenice z teplého léta může být lepkavější), a podobně. Na tomto příkladu je tedy více podstatné spíš to, jak jste ho udělali.

Větším problémem je ale způsob měření. **Metoda každého měření by měla být stejná pro všechna měření**, aby se podané výsledky týkaly jedné věci. Záleží totiž na dvou podstatných parametrech — jak dlouhý je úsek špagety, který lámete a jak široké je lanko, které láme špagetu. Čím delší je totiž lánaný úsek špagety,

tím větší máte páku, tedy tím menší síla je potřebná na zlomení špagety. Čím širší zase máte provázek, který láme špagetu tím větší sílu budete potřebovat. To proto, že ji v podstatě nelámete na jednom, ale na dvou místech. Tyto věci změní výsledky natolik, že vaše odpovědi pro jednu špagetu se pohybovaly od 0,1 N do 4,5 N.

Tak konec řečí, pustíme se do experimentování. Ještě než začneme by však bylo vhodné uvědomit si rozdíl mezi silou a hmotností. Nás nezajímá, při jaké hmotnosti závaží se špagety zlomí, protože pokud bychom stejné závaží přivázali na špagety na Měsíci, špagety by se nezlomily. Proto nás zajímá síla, která platí všude stejně. Při jejím počítání budeme vycházet ze vztahu $F = m \cdot g$, kde gravitační zrychlení $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$. Začneme nadefinováním postupu, potom si probereme vyšlé hodnoty:

1. Vedle sebe si postavíme dva stoly ve stejné výšce, aby mezi nimi byla mezera kolem 1 cm, aby byla páka lámání minimální.
2. Na tyto dvě desky budeme postupně klást špagety, v mezeře mezi deskami na ně zavěsíme prázdnou PET-flašku.
3. **Měření síly:** Buď tak, že budeme tahat siloměrem **nahoru** (kdybychom tahali dolů, zkreslil by se výsledek tím, že bychom na špagetu působili i hmotností samotného siloměru) a odečteme ze stupnice hodnotu, kdy špagety praskly. Nebo si vezmeme PET-flašku a postupně do ní budeme přilévat vodu. V momentě, kdy špagety prasknou, zvážíme PET-flašku i s vodou, která v ní byla. Voda je lepší než hřebíky/sponky, protože jsme jí schopni přidávat spojitě, ne skokově. Zváženou hmotnost vynásobíme gravitačním zrychlením a požadovanou získáme sílu.

Pozor: Pokud měříme více špaget najednou, musí být všechny rovnoměrně zatížené, aby praskly najednou.

Možné výsledky měření (například ty moje):

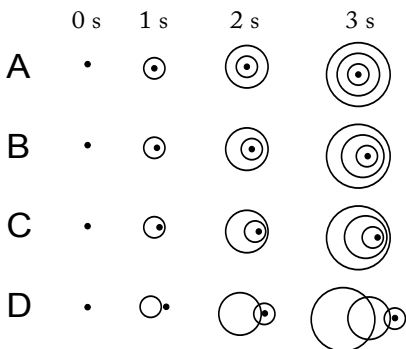
Počet špaget	Síla [N]
1	1,6
2	3,2
3	4,5
4	6,6
5	8,0
6	9,3
7	11,4
8	13,0
9	14,5
10	15,8

Nyní bychom si měli všimnout zajímavé věci. Síla potřebná na zlomení 10 špaget je (přibližně) 10-krát větší, než síla potřebná na zlomení jedné špagety. To je

logické, pretože lámeme najednou 10 špaget, tým pádom i síla by mala byť 10-krát väčšia.

Bodovanie: *Odpoveď v Newtonoch (ne gramech) 1 b. Alespoň približne platí, že zlomiť 10 špaget je 10-krát ťžší než jednu špagetu 0,1 b - 1,0 b. Zbylé body podľa správnosti postupu.*

Príklad 5 - Člny opravoval Ondrej Bogár - Bugj



Mnohí z vás napísali správne riešenie. Člny sa pohybujú tým smerom, kde sú zhustené vlny, a čím je zhustenie väčšie, tým ide čln rýchlejšie. Otázka ale stále ostáva. **PREČO JE TO TAK?** Keď čln stojí, tak sa okolo neho vytvára vlna v tvare kružnice a šíri sa všetkými smermi rovnako rýchlo. Preto ak čln stojí na mieste, tak to vyzerá ako na obrázku A. Čo sa teraz stane, ak sa loď začne pohybovať? Každú sekundu sa vytvorí vlna, ale čln je vždy na inom mieste. Preto stred každej kružnice (vlny) bude inde. To sa

prejaví, ako vidieť z obrázku B, zhustením v smere plavby. Ako to zmení rôzna rýchlosť člnov? Čím je čln rýchlejší, tým sa za 1 s dostane bližšie k čelu vlny, ktorá vznikla pred sekundou. Pozriem na obrázok C, kde sa čln pohybuje väčšou rýchlosťou ako na obrázku B, a vidím, že vlny sú na sebe viac nahustené.

Zaujímavý prípad nastane, ak je čln rýchlejší ako vlny na vode (obrázok D). To je aj prípad reálnych motorových člnov, veľkých lodí alebo kačičiek na jazere. Vtedy za jednu sekundu čln prebehne vlnu, ktorú predtým vytvoril a vzniká za ním kužeľ z vln.

Bodovanie: *Za určenie správneho smeru 2 b a rýchlosti 1 b. Za vysvetlenie aspoň pár vetami ste mohli získať po bode pre každú otázku. Snažil som sa domýšľať, čo ste asi chceli napísať, ale istotu bodov získate len tak, že to tam naozaj napíšete.*

Príklad 6 - Ťažisko pizze opravovala Emília Rigdová - Milka

Tento príklad sa dal riešiť dvoma spôsobmi, buď experimentálne, alebo výpočtom (graficky). V každom prípade počítam s tým, že pizza je homogénna (rovnako ťažká v každom bode), čiže zanedbávam prílohy a rôzne hrúbky. Navyše hneď na začiatok musím napísať, s akou veľkou pizzou som merala (moja mala polomer 10cm).

Pri experimente postupujem jednoducho. Vystrihnem si kruhovú pizzu z tvrdého papiera a čiarami ju rozdelím na osem rovnakých častí. Teraz si môžem vybrať

jednoduchší, ale menej presný spôsob, čiže podopriem ju zospodu v nejakom bode hrotom napríklad kružidla. Keď podopriem pizzu práve pod ťažiskom, nebude sa nakláňať do strán.

Presnejší spôsob je zavesiť ju zvislo za ľubovoľný bod (ideálne bližšie k okraju). Takto zavesená pizza sa začne kývať. A bude sa kývať až kým sa nedostane do najstabilnejšej polohy. Ťažisko je "pôsobiskom síl", čo znamená, že sila, ktorá pôsobí na teleso, naň pôsobí práve v ťažisku (z fyzikálneho hľadiska si môžeme celé teleso nahradiť ťažiskom s hmotnosťou telesa). Na zavesenú pizzu bude pôsobiť gravitačná sila, ktorá samozrejme pôsobí smerom dole. Ťažisko sa bude teda snažiť dostať čo najnižšie a to sa dá tak, že sa presunie priamo pod bod, za ktorý je pizza zavesená. Ak teda nájdem zvislú čiaru, napríklad pomocou šnúrky so závažím visiacej z bodu závesu a zopakujem celý proces ešte aspoň raz s iným bodom, za ktorý pizzu zavesím, nájdem ťažisko. Bude presne v priesečníku takýchto čiar. Nazývajú sa ťažnice (priamky, o ktorých viem, že prechádzajú ťažiskom).

Druhý spôsob je zistiť to graficky. Tu ale musím zanedbať to, že pizza je okrúhla a jednotlivé dieliky si musím predstaviť ako trojuholníky. Nájsť ťažisko trojuholníka viem (narysujem ťažnice z vrcholu do stredu protiláhlej strany a tie sa mi pretnú v ťažisku). Keď mám takéto trojuholníčky dva, zjednoduším si ich na dva body - ťažiská. Teraz si to predstavím znova, ale ako páku. Ťažisko oboch bodov bude v bode, v ktorom ak podopriem páku, zostane v rovnováhe. Vzdialenosti od bodu, v ktorom pôsobí sila sú a_1 a a_2 , sila je ťažová, hmotnosti sú rovnaké.

$$a_1 mg = a_2 mg$$

$$a_1 = a_2$$

Spoločné ťažisko dvoch kúskov bude teda v strede medzi ich ťažiskami. Keď pridám ešte jeden kúsok, môžem počítať podobne. Jediné čo sa mení je, že použijem miesto prvej hmotnosti dvojnásobnú (2 kúsky pizze) a vzdialenosť meriam od spoločného ťažiska.

$$2a_1 mg = a_2 mg$$

$$2a_1 = a_2$$

Čiže spoločné ťažisko troch kúskov bude v $1/3$ vzdialenosti od spoločného ťažiska prvého a druhého kúska. Takto by som mohla stále pokračovať a nakoniec by som odmerala, ako ďaleko sú jednotlivé ťažiská od stredu pôvodnej pizze. Mne vyšli výsledky 0,8 cm, 1,9 cm, 2,9 cm, 4,0 cm, 5,0 cm, 5,8 cm, 6,3 cm.

Bodovanie: 1 b *výsledky*, 2 b *postup a popis aparatury*, 2 b *vysvetlenie, prečo Tvoje riešenie fungovalo a aké chyby merania Ti mohli vzniknúť*.

Príklad 7 - Páky opravoval Peter Dupej

Toto bola ľahká úloha, pretože veľmi veľa z vás vyrátalo hmotnosti závaží správne.

Základná vec, ktorú ste si mali uvedomiť, bola **nepriama úmera** medzi hmotnosťou závažia (alebo skôr silou pôsobiacou na páku) a vzdialenosťou od osi otáčania, čiže dĺžkou ramena páky. Táto nepriama úmera vyplýva z jednoduchej rovnosti momentov síl v rovnovážnom stave páky, ktoré vyrátame podľa vzorca $M = rF$.

$$\begin{aligned}M_1 &= M_2 \\r_1 F_1 &= r_2 F_2 \\ \frac{F_1}{F_2} &= \frac{r_2}{r_1}\end{aligned}$$

Tu vidíme, že čím ďalej posúvame pôsobisko sily od osi otáčania, tým väčší moment sily vyvoláva stále tá istá sila. Z toho vyplýva, že na vyvolanie toho istého momentu sily na dlhšom ramene, stačí menšia sila alebo ľahšie závažie ako na kratšom ramene.

Ak si sily vyjadríme ako $F = mg$, tak na ľavej strane sa nám gravitačné zrýchlenia vykrátia a dostaneme ten istý vzťah pre pomery hmotností a ramien.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Teraz vidíme, ako ľahko sa dala úloha riešiť aj bez informácie o dĺžkach jednotlivých pák. Stačili by nám len pomery ramien. Je úplne jedno, či dosadíme $r_1 = \frac{1}{4}$ m a $r_2 = \frac{3}{4}$ m alebo $r_1 = 100$ m a $r_2 = 300$ m, kým je dodržaný pomer ramien $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$.

Ak vieme, že závažie D váži $m_D = 5$ kg a pomery ramien sú $\frac{r_D}{r_C} = \frac{1}{3}$ (spodná páka), $\frac{r_{CD}}{r_B} = \frac{1}{2}$ (stredná páka) a $\frac{r_A}{r_{BCD}} = \frac{1}{1}$ (horná páka), tak samotné riešenie je už len premieňanie pomerov ramien a hmotností a sčítovanie hmotností závaží na pákach, ktoré viseli na inej páke. Napríklad stredná páka je na pravej strane zaťažena hmotnosťou závaží C a D a horná páka navyše aj závažím B.

$$m_C = m_D \cdot \frac{r_D}{r_C} = 5 \text{ kg} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \text{ kg} \doteq 1,67 \text{ kg}$$

$$m_B = (m_C + m_D) \cdot \frac{r_{CD}}{r_B} = \left(\frac{5}{3} \text{ kg} + 5 \text{ kg} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5 + 15}{3} \text{ kg} \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{3} \text{ kg} \doteq 3,33 \text{ kg}$$

$$m_A = (m_B + m_C + m_D) \cdot \frac{r_A}{r_{BCD}} = \left(\frac{10}{3} \text{ kg} + \frac{5}{3} \text{ kg} + 5 \text{ kg} \right) \cdot \frac{1}{1} = \frac{30}{3} \text{ kg} = 10 \text{ kg}$$

Chyby ste robili, ak ste použili priamu úmeru miesto nepriamej medzi hmotnosťou (alebo silou) a dĺžkou ramena, potom nejaké numerické chyby, či zlé úpravy zlomkov. **Za zaokrúhlené výsledky sa nestrhávajú žiadne body.** Dôležité je tiež správne si prečítať zadanie a nevymeniť pomery ramien.

Bodovanie: Bol som dnes štedrý a už len za správne vyrátanie úlohy boli 3 b, za postup bol ďalší 1 b, a nakoniec za vysvetlenie pomerov hmotnosti a ramien, a aspoň spomenutie momentu síl či napísanie vzťahu $M = rF$ ste mohli dostať posledný 1 b.

Príklad 8 - Hustoty opravoval Martin Lauko - Logik

Ahojte! V tomto príklade bolo najdôležitejšie správne odôvodniť, prečo telesá s požadovanými hustotami nemôžu existovať. Vypočítajme si najskôr hustoty jednotlivých telies podľa vzorca $\rho = m/V$, pričom premeníme jednotky na základné.

Teleso	Hmotnosť	Objem [cm ³]	Hmotnosť [kg]	Objem [m ³]	Hustota [kg/m ³]
1	0,5 kg	100	0,5	0,0001	5000,00
2	2 dg	90	0,0002	0,00009	2,22
3	400 g	90	0,4	0,00009	4444,44
4	0,8 kg	160	0,8	0,00016	5000,00
5	600 g	130	0,6	0,00013	4615,38

Pozor na jednotku dg - v skutočnosti je to decigram (0,1 g), nie dekagram (10 g), ako ste viacerí počítali. Ten má skratku dkg a používa sa aj v bežnom živote, preto som za to body nestrhával.

Všimnime si, že keď skombinujeme (zlepíme) dve z týchto telies, hustota výsledného telesa bude celková hmotnosť vydelená celkovým objemom. Zároveň bude medzi hustotou jedného a druhého telesa (bude to akýsi priemer, nie však $(\rho_1 + \rho_2)/2$).

Preto teleso b) s hustotou $5510 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ nemôžeme skonštruovať (všetky telesá majú nižšiu hustotu). Čo však teleso a) s hustotou $2120 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$? Určite musíme použiť teleso 2, keďže ako jediné má menšiu ako požadovanú hustotu. Vyskúšaním všetkých dvoj-kombinácií získame najmenšiu hustotu $2333,33 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, ktorá vznikne spojením telies 2 a 3. To je viac ako chceme, požadovaná hustota sa teda tiež nedá poskladať.

Trochu komplikovanejšia je situácia v prípade c), kde požadujeme hustotu $4290 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Táto je medzi najmenšou a najväčšou hustotou v tabuľke, teda teoreticky by existovať mohla. Všimnime si, že jediné teleso s nižšou hustotou je opäť teleso 2, toto musí byť obsiahnuté v zlepenom telese c. K nemu môžeme pridať niekoľko ďalších telies. Preskúšaním všetkých možností však zistíme, že hustotu $4290 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ sa nám nepodarí vytvoriť.

Teda záver: telesá s požadovanými hustotami nie je možné vytvoriť zo zadaných piatich telies.

Bodovanie: Za správne riešenie so zdôvodnením 5 b, bez zdôvodnenia 2,5 b, výpočet hustôt jednotlivých telies 1 bod, chyby podľa závažnosti.