Celoslovenský korešpondenčný seminár z fyziky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOFYZ

14. ročník www.pikofyz.sk šk. rok 2011/2012

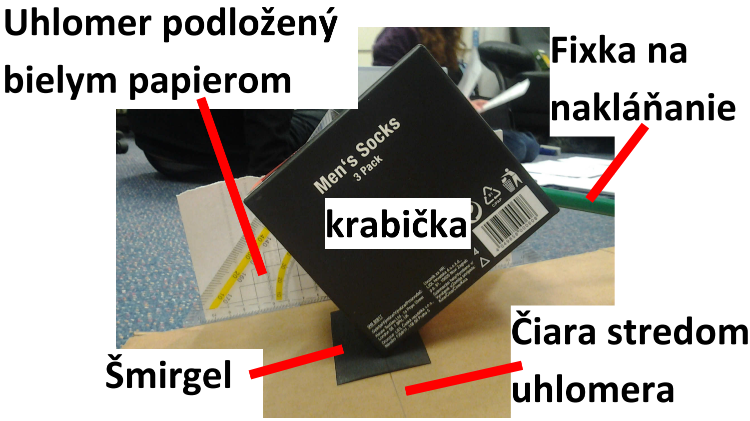
Vzorové riešenia 3. série zimnej časti

Príklad 1 - Škatuľa na šikmej poličke *opravoval Martin Svetlík - Panda*

Tento príklad ste mali riešiť pokusom, aj keď samozrejme, keď ste napísali aj teóriu, že prečo sa to správa tak, ako sa to správa, bolo to fajn. Zaujímavé však je najmä to, čo ste namerali, ako ste to merali, a ako ste vyriešili rôzne problémy pri meraní (napríklad že sa kocka šmýka dole naklonenou poličkou).

Ako prvé je potrebné pripraviť si dobré pomôcky na experimentovanie a premyslieť si, ako budeme merať (ako uvidíte v tomto vzoráku, bolo tam treba dosť niektoré veci riešiť, aby to fungovalo). Ja som namiesto naklonenej poličky použil veľkú krabicu so sklopným vekom, to sa mi bude dobre merať uhol náklonu a nemusím hľadať poličku $\ddot\smile$. Zboku som k tomu sklápaciemu veku priskrutkoval uhlomer tak, aby jeho 0° a 180° bolo na úrovni roviny veka. Uhlomer som si podložil bielym papierom, aby som lepšie videl na jeho čiarky. Zo stredu uhlomera som si nakreslil na „poličku“ (teda na veko krabice) čiaru. Táto čiara je dôležitá, na nej musí stáť tá hrana kocky, okolo ktorej ju budeme otáčať, aby to, čo odčítame z uhlomera bol naozaj náklon kocky voči „poličke“.

Ešte som mal k dispozícii druhý uhlomer, ktorým som si vždy odmeral sklon poličky a tú som potom podoprel, aby mi tak ostala, kým budem merať. Na počudovanie som mal doma aj krabičku od ponožiek v tvare kocky, takže tú som použil ako krabičku v tvare kocky (nečakane) $\ddot\smile$. Dôležité bolo mať ju položenú na poličke blízko uhlomera a pozerať sa na ňu tak, že mi jej predná a zadná hrana pri uhlomeri splývali, aby som naozaj odčítal správne hodnoty z uhlomera. Ako to celé bolo zostavené vidíte na obrázku:



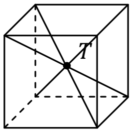
Začal som merať pri sklone poličky 0°. Kocku som najprv nachýlil tak, aby už stála na hrane a nešmýkala sa po poličke a potom som ju začal pomaly nachyľovať prstom z boku až kým sa neprevrátila. Nameral som, že som ju vychýlil o 48°. Pokus som pre istotu zopakoval ešte dvakrát, a dobre som spravil... Vyšlo mi 44° a 50°. To sa mi zdalo ako dosť veľké odchýlky, a tak som začal hľadať chybu v mojom postupe... A chyba bola, že som krabičku nakláňal prstom! Pretože prst sa mi tak trochu lepil na krabičku (prirodzená vlhkosť prstu, žiadne lepidlo), a tak krabičku občas držal dlhšie ako by vydržala sama. Takže v ďalších pokusoch som už krabičku nakláňal fixkou, a už som dostával konzistentnejšie výsledky.

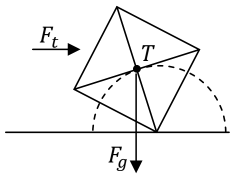
Posledný problém, ktorý som musel vyriešiť, bolo, že pri uhle poličky väčšom ako 20° sa mi kocka začala šmýkať po poličke dole namiesto toho, aby sa pekne otáčala okolo hrany. Keďže šmýkanie sa je taká nepríjemná vlastnosť pri hladkých povrchoch, vyriešil som to drsne ⌣̈. Zobral som šmirgel a obojstrannou lepiacou páskou som ho prilepil na poličku tam, kde som kládol kocku. Potom som dorobil merania až do 35°, ďalej sa mi už nechcelo ⌣̈. Pre každý uhol poličky som spravil 4 merania a potom z nich priemer.

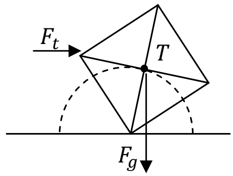
Takže tu je to, čo som nameral (všetky hodnoty v tabuľke sú v stupňoch):

Uhol	Uhol kocky				
poličky	1	2	3	4	priemer
0	45	46	45	45	45.25
5	40	40	39	41	40
10	33	34	34	33	33.5
15	30	29	30	31	30
20	25	25	25	25	25
25	19	20	20	20	19.75
30	15	16	16	15	15.5
35	10	9	9	11	9.75

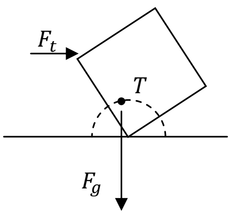
Pozrime sa, čo nám vyšlo. Vo väčšine prípadov je to tak, že uhol poličky (od zeme) a uhol kocky (od poličky) majú súčet 45°. Pri desaťstupňovom náklone poličky mi to nejako moc nevyšlo, ale to bolo asi spôsobené nejakou chybou, asi som si zle nastavil sklon poličky. V ostatných to ale vychádzalo celkom pekne, že? A povieme si aj, že prečo.







Vieme, že tiažová sila pôsobí na teleso v jeho ťažisku. Taká kocka má ťažisko na priesečníku uhlopriečok (obrázok vľavo). Keďže ju otáčame okolo celej hrany, môžme si to zjednodušiť na pohľad z boku, kde vidíme len jednu stenu - štvorec, ktorý sa otáča okolo jedného svojho vrcholu. Vidíme, že ťažisko (bod), ktoré sa otáča okolo vrcholu (iného bodu), musí opisovať kružnicový oblúk. Pokiaľ sa ťažisko nedostane nad bod otáčania (obrázok v strede), tiažová sila, kotrá núti ťažisko ísť dole, ho zároveň núti ísť na tej kružnici naspäť, lenže proti tomu pôsobíme my svojím tlačením na kocku (preto keď kocku tlačíme, cítime, že nám kladie odpor, to je presne to, že tiaž ju otáča proti nám). V momente, ako je ťažisko nad bodom otáčania, tak tiažová nemá žiadny otáčavý efekt, akurát nám zaručuje, že kocka sa nezačne vznášať $\ddot\smile$. No keď kocku ešte kúsok pootočíme (obrázok vpravo), tak tiažová sila stiahne ťažisko dole, čo už je tentokrát tým smerom, z ktorého nepôsobíme žiadnou silou, a tak sa škatuľa prevráti. Bez ohľadu na to, pod akým uhlom je naklokená polička, kocka sa prevráti vtedy, keď jej ťažisko prejde ponad hranu, okolo ktorej otáčame. A slovíčko **ponad** nám našepkáva, že v tom hrá úlohu natočenie kocky voči vodorovnej rovine, čo je presne súčet uhlu poličky (voči vodorovnej rovine) a uhlu kocky (voči poličke).



Pre fajnšmekrov prikladám ešte ďalší obrázok. Keďže škatuľa nemusela byť prázdna, nemuselo byť ťažisko v strede (posunutie v smere rovnobežnom s hranou, okolo ktorej sa škatuľa otáča, nehrá úlohu, takže zase si to zjednodušíme na štvorec). Podľa toho, kde sa ťažisko nachádza, môže byť uhol, pri ktorom sa dostane nad os otáčania, rôzny, keď si zoberieme nejakú rozumnú škatuľu, v ktorej sú do určitej výšky rovnomerne poukladané nejaké veci, tak to môže byť napríklad 60° voči vodorovnej rovine. A zase škatuľa, ktorá má v niektorom rohu (zamyslite sa, v ktorom) prilepenú nejakú malú ťažkú vec, sa nemusí prevrátiť ani keď ju nakloníme o napríklad 80°, alebo (ak má tú malú ťažkú vec v inom rohu) sa môže prevrátiť aj keby sme ju naklonili len o pár stupňov.

Bodovanie: *Za popis toho, ako ste si postavili meracie nástroje a ako ste merali, boli dva body. Páčilo sa mi, že niektorí mi poslali fotku s popismi, čo majú kde. Za* *namerané hodnoty ste mohli získať ďalšie dva body, pričom tu bolo dôležité, aby ste spravili meraní viac. No a posledný bodík bol za to, že ste vyslovili hypotézu, že ako to teda je.*

Príklad 2 - Potápačský zvon *opravovala Zuzana Bogárová - Bum*

Takže ako funguje tento trik? Všetci vieme, že vzduch má menšiu hustotu ako voda. Z Archimedovho zákona nám vyplýva, že pokiaľ ponoríme vzduch do vody, tak bude vytlačaný smerom nahor (lebo vztlaková sila pôsobiaca smerom nahor bude väčšia ako ťiažová sila pôsobiaca na vzduch). Lenže nám stojí v ceste nahor zvon, ktorý nepustí vzduch preč. Vzduch ostane zaseknutý medzi zvonom a vodou, a nevie sa pohnúť.

Teraz k druhej otázke. Aký je tlak vzduchu vo vnútri zvona? S väčšinou z vás som sa zhodla na tom, že tam niekde musí byť hydrostatický tlak. Hydrostatickým tlakom tlačí kvapalina na telesá, ktoré sú v ňej ponorené. To pre nás znamená, že na teleso ponorené vo vode pôsobí sila, ktorú si vieme predstaviť ako keby na tom telese máme položené závažie o hmotnosti vodného stĺpca. Z toho vyplýva, že čím je teleso hlbšie, tak tým väčšia tlaková sila naň pôsobí. Keďže náš vzduch je vo vode, tak na neho hydrostatický tlak pôsobí. Keď som povedala, že tam niekde ten hydrostatický tlak je, myslela som, že tam nie je sám. S ním tam robí šarapatu aj atmosférický tlak. Čo tam ten robí? No na začiatku, keď sme mali zvon von z vody, bol tam atmosférický tlak. Takže vzduch, čo bol vo vnútri zvona mal atmosférický tlak. V momente, keď sme zvon ponorili do vody tak tam ten vzduch ostal, nemal ako ujsť. Takže tam ostal vzduch, ktorý má stále ten atmosférický tlak. Ale keď sme ten zvon už ponorili, tak naň začína pôsobiť už spomínaný hydrostatický tlak. Oba tlaky pôsobia naraz. To pre nás znamená, že **tlak vzduchu vo zvone je súčet atmosférického a hydrostatického tlaku**.

Bodovanie: *Za kompletné vysvetlenie tohto triku* 2 *b, za hydrostatiký tlak* $0,5$ *b, za hydrostatický plus atmosférický* $1,5$ *b, za dostatočné zdvôvodnenie vysvetlení* 1 *b.*

Príklad 3 - Tank *opravovala Kristína Komanová*

Teším sa, že mi od vás prišlo veľa rôznych riešení. Tento príklad sa naozaj dal počítať kadejako. Avšak skôr, ako si nejaké riešenia ukážeme, si predstavíme vaše najčastejšie chyby.

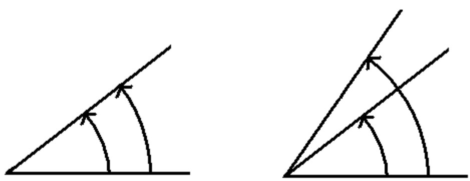
Zákruta. V zadaní je písané, že má polomer $r = 20\,\mathrm{m}$, čiže z toho vyplýva, že to bude asi nejaká časť kružnice. Ale aká? Mnohí z vás sa nad tým vôbec nezamýšľali, a bez akéhokoľvek vysvetlenia automaticky počítali s celou kružnicou alebo polkružnicou či štvrťkružnicou. V skutočnosti na tom nezáleží, ale to by bolo treba zdôvodniť. My budeme počítať s tým, že tank prejde v zákrute nám neznámy uhol α. Skúsme sa teda zamyslieť. Vonkajší pás neprejde rovnakú dráhu ako vnútorný, lebo sa pohybuje po kružnici s väčším polomerom ako vnútorný. Konkrétne sa vonkajší pás pohybuje po kružnici s polomerom $20\,\mathrm{m} + 1\,\mathrm{m} = 21\,\mathrm{m}$ a vnútorný po kružnici s polomerom $20\,\mathrm{m} - 1\,\mathrm{m} = 19\,\mathrm{m}$. Takže keď vonkajší pás prejde dráhu $2\pi \cdot 21\,\mathrm{m} \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$, vnútorný vtedy prejde $2\pi \cdot 19\,\mathrm{m} \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$.

Pomer. Čo to vlastne je? Pomer je porovnanie 2 nesúdeliteľných prirodzených čísel. Nie je to výsledok po delení, ako mnohí z vás napísali. Poďme ale už k samotným riešeniam.

Riešenie 1:Vieme, že pásy tanku musia zákrutou prejsť za rovnaký čas: $t_1 = t_2$ kde indexom 1 môžme označiť vonkajší pás a indexom 2 vnútorný. t dokážeme vypočítať ako $t = \frac{s}{v}$. Takže ak k tomu využijeme rovnosť časov, postupnou úpravou dostaneme výsledok

$$\begin{aligned} t_1 &= t_2 \\ \frac{s_1}{v_1} &= \frac{s_2}{v_2} \\ \frac{2\pi \cdot 21\,\mathrm{m} \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}}{v_1} &= \frac{2\pi \cdot 19\,\mathrm{m} \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}}{v_2} \\ \frac{v_1}{v_2} &= \frac{21}{19} \end{aligned}$$

Riešenie 2: Ešte rýchlejšie riešenie vychádza z uhlovej rýchlosti. Tá sa síce neučí, ale keďže zopár z vás úlohu riešilo týmto spôsobom, uvádzam aj takúto možnosť. Pokiaľ sa niečo pohybuje po kružnici, tak vieme povedať aký uhol prejde za jednotku času. A toto je práve uhlová rýchlosť. Vzorec na výpočet uhlovej rýchlosti je $\omega = v \cdot r \cdot \frac{360^\circ}{2\pi}$. Uhlovú rýchlosť musia mať pásy rovnakú (Prečo? Porovnajte si obr. 1 a obr. 2, na 1. majú uhlovú rýchlosť rovnakú a na 2. nie) a výpočtom by sme dostali rovnaký výsledok ako pri prvom riešení.



Obr. 1 Obr. 2

Rada do budúcnosti: Nedosádzajte si do vzorcov čísla (obzvlášť platí pre π) hneď, lebo si tým zbytočne skomplikujete život a nemusia vám vyjsť presné čísla. Keď si hľadané písmenko vyjadríte, väčšinou sa vám nejaké veci vykrátia a nakoniec vám vyjde niečo jednoduhšie. Tí z vás, ktorí si v príklade dosádzali čísla, vyšiel pomer 19:17 a nie 21:19, čo bol správny výsledok.

A ešte niečo. Niektorí majú na svojich riešeniach pečiatku s nápisom **APPROVED** alebo **NOT APPROVED**. Z tej prvej sa môžete tešiť, lebo vaše riešenie sa mi veľmi páčilo. A tú druhú dostali podozrivo podobné riešenia… Nabudúce to už určite nebudem tolerovať a… posvietim si na vás! ;)

Bodovanie: *Strhávala som* $0,5$ *b za to, ak ste nenapísali, že na veľkosti zákruty nezáleží. Ďalší* $0,5$ *b ste mohli stratiť za odpoveď 1,1. Ak ste mali niekde chybu, a vaše riešenie bolo bez komentára, tak išiel dole ďalší* $0,5$ *b. Opäť strata max.* $0,5$ *b bola v prípade, že ste zaokrúhľovali čísla, a tým vám vznikol iný výsledok.*

Príklad 4 - Brzdiaci vlak *opravoval Ondrej Bogár - Bugy*

Väčšina z vás tento príklad zvládla. Napriek tomu odporúčam, aby ste si prečítali vzorové riešenie. A to preto, že okrem toho vedieť vypočítať príklad, je dôležité ho aj vysvetliť a vyjadrovať sa správne fyzikálne. Pozrime sa na prípad s loptičkou. Vlak ide rýchlosťou v vzhľadom na koľajnice. To znamená, že aj loptička sa pohybuje vzhľadom na koľajnice rýchlosťou v. Keď vlak začne brzdiť, tak pôsobí naň sila trenia F (vonkajšia sila). Tá spôsobí, že vlak zastaví. Ale na loptičku sila F nepôsobí. A kedže loptička má malé trenie, tak ani žiadna iná sila na ňu nepôsobí. Preto sa bude ďalej pohybovať nezmenenou rýchlosťou v.

Toto sa nazýva aj **zákon zotrvačnosti** a hovorí: Teleso zotrváva v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, ak naň pôsobí nulová vonkajšia sila.

Zotrvačnosť nie je fyzikálna veličina! Nevieme ju merať a ani nemá fyzikálnu jednotku.

Teraz, keď už vieme ako sa správa loptička, pozrime sa na fľašu. Tiež chce zotrvať vo svojom pohybe smerom dopredu. Keď ju položíme tak, aby sa mohla valiť, tak to je to isté ako loptička. Valivé trenie je omnoho menšie ako šmykové trenie. Preto keď postavíme fľašu tak, aby bolo trenie šmykové a teda aj trecia sila veľká, tak nebude platiť, že vonkajšia sila je nulová. Preto aj fľaša zabrzdí a nebude zotrvávať v pohybe dopredu. Veľké šmykové trenie dosiahneme tak, že fľašu dáme štupľom proti smeru pohybu vlaku. Lebo tá hrana a drsný povrch fľaše spôsobia väčšie šmykové trenie. Ak vlak zabrzdí veľmi prudko tak ani toto trenie nám nepomôže a fľaša, loptička, kufre a aj cestujúci budú zotrvačnosťou letieť smerom dopredu :-)

Pozor, väčšia plocha neznamená väčšie trenie.

Bodovanie: *Za vysvetlenie, čo je to zotrvačnosť a akým smerom sa pohybujú predmety* 2 *b. Za opis ako trenie zmení pohyb fľaše* 1 *b a za určenie smeru ako natočiť fľašu aby nespadla* 1 *b. Za slovné zdôvodnenie a opis* 1 *b.*

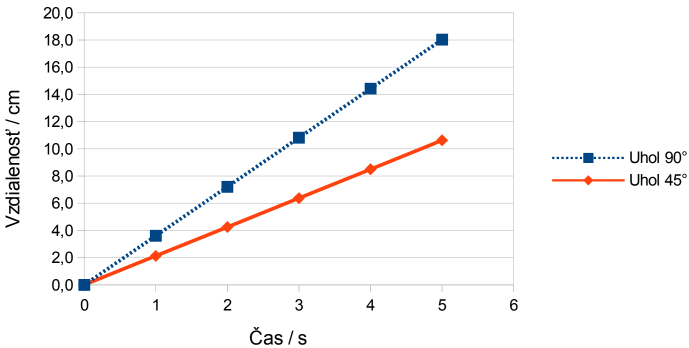
Príklad 5 - Mravce *opravovala Aďa Lešková*

Najprv si narysujeme 2 chodníky križovatky, ktoré nás zaujímajú, zvierajúce uhol 90°. Vyznačme si body, v ktorých sa budú nachádzať mravce idúce rozdielnymi rýchlosťami týmito dvoma chodníkmi po 1, 2, 3, 4 a 5 sekundách. Po prvej sekunde sa prvý mravec idúci rýchlosťou $2\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ dostane na svojom chodníku do vzdialenosti $2\,\mathrm{cm}$ od križovatky a druhý mravec do vzdialenosti $3\,\mathrm{cm}$ na svojom chodníku. Po každej ďalšej sekunde sa prvý mravec posunie o 2 cm na svojom chodníku a druhý mravec o 3 cm na svojom chodníku. Zistím vzdialenosť mravca 1 a mravca 2 postupne po 1, 2, 3, 4 a 5 sekundách. Ak rysujem presne (mám zastrúhanú ceruzku a rysujem presné uhly), vyjdú mi také vzájomné vzdialenosti mravcov v týchto časoch ako v tabuľke vľavo. Ten istý postup zopakujeme pre chodníky, ktoré zvierajú uhol 45°. Vyjdú mi vzájomné vzdialenosti mravcov ako v tabuľke vpravo:

čas/s	vzájomná vzdialenosť/cm
0	0,0
1	3,6
2	7,2
3	10,8
4	14,4
5	18,0

čas/s	vzájomná vzdialenosť/cm
0	0,0
1	2,1
2	4,2
3	6,4
4	8,5
5	10,6

Z daných nameraných hodnôt vytvoríme graf ukazujúci závislosť vzájomnej vzdialenosti mravcov od času pre uhly chodníkov 90° aj 45°:



Môžeme si všimnúť, že keď chodníky zvierajú uhol 90°, mravce sa od seba vzdiaľujú rýchlejšie ako keď zvierajú uhol 45°.

Bodovanie: *Mohli ste získať* 3 *b za grafy závislosti vzájomnej vzdialenosti mravcov od času pre oba uhly chodníkov a* 2 *b za postup, ako ste došli k nameraným hodnotám, ktoré ste v grafe použili.*

Príklad 6 - Odporný a ešte odpornejší *opravoval Matej Duník - Matt*

Aby ste úspešne vyriešili túto úlohu, museli ste si uvedomiť dve veci. Najprv, že keď dosadíte minimálny odpor, dostanete maximálny prúd a keď dosadíte maximálny odpor, dostanete minimálny prúd. Potom už len stačí dosadiť ten maximálny a minimálny odpor.

Najprv si vyjadrime odpor dvojice rezistorov R_2 a R_3.

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

Celkový odpor je teda

$$R = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

Vypočítajme si maximálny odpor

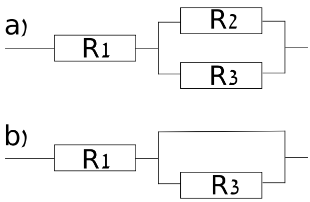
$$R_{max} = 100\,\Omega + \frac{50\,\mathrm{M}\Omega \cdot 470\,\mathrm{k}\Omega}{50\,\mathrm{M}\Omega + 470\,\mathrm{k}\Omega} = 100\,\Omega + \frac{50}{50{,}47} \cdot 470\,\mathrm{k}\Omega$$

$$R_{max} = 465{,}7\,\mathrm{k}\Omega$$

a minimálny odpor

$$R_{min} = 100\,\Omega + \frac{0 \cdot 470\,\mathrm{k}\Omega}{0 + 470\,\mathrm{k}\Omega} = 100\,\Omega + 0 = 100\,\Omega$$

Všimnite si, že ak R_2 zvolíme 0, tak je výsledný odpor rovnaký, ako keby bol v obvode len rezistor R_1. To preto, lebo elektróny jednoducho všetky pretečú (na obrázku b) hornou vetvou a nenechajú sa spomaľovať rezistorom R_3.



Viacerí z Vás si mysleli, že ak bude mať rezistor R_2 odpor 0, tak to bude ako keby horná vetva v obvode vôbec nebola. To ale funguje presne opačne. Hornú vetvu by sme si mohli odmyslieť, keby tam mal rezistor veľmi veľmi veľmi veľký odpor, takže by tadiaľ v podstate žiadny prúd netiekol a teda by sa dal výsledný odpor rátať tak, ako mnohí z vás chceli, teda $470\,\mathrm{k}\Omega + 100\,\Omega$.

Bodovanie: *Veľa z vás to malo úplne správne, takže už za drobné chyby pri premene jednotiek či zaokrúhľovaní som strhával do* 0,5 *b. Ak ste si mysleli, že pri nulovom odpore premenlivého rezistora si môžeme celú vetvu odmyslieť, tak ste mohli dostať nanajvýš* 3 *b.*

Príklad 7 - Kúpeľ *opravoval Tomáš Jančo - Janči*

Ahojte! Poďme pekne po poriadku: čo si v tejto úlohe bolo treba uvedomiť?

- Voda vo vani chladne stále rovnako rýchlo. Rovnako ochladne o 0,2℃ aj v minúte, keď sa do vane prileje teplá voda.
- O tom, či sa do vane voda prileje sa rozhoduje len každú minútu. Teda v momente prdania teplej vody nebude mať voda vo vani 28,0℃, ale niekedy stihne vychladnúť aj viac.
- Po priliatí horúcej vody treba vypočítať výslednú teplotu, tú nezabudnúť znížiť o 0,2℃ a zvýšiť objem vody vo vani o 2 ℓ
- Graf závislosti teploty od času má na osi X čas a na osi Y teplotu.

Aby sme mohli nakresliť (alebo snáď narysovať) graf, musíme najskôr vedieť hodnoty teploty pre každú minútu. V čase 0 min má voda vo vani 30℃. Potom chladne o 0,2℃ za minútu. Postupne teda teplota vo vani bude 29,8℃, 29,6℃, 29,4℃ … V 10. minúte bude 28,0℃, tu však ešte regulátor teploty nezareaguje (teplota nekresla **pod** 28℃). Až v 11. minúte bude teplota 27,8℃ < 28℃. Vypočítajme výslednú teplotu.Môžeme si zapísať kalorimetrickú rovnicu:

$$Q_{\text{prijaté}} = Q_{\text{odovzdané}}$$

$$m_0 \cdot c \cdot \Delta t_{\text{vo vani}} = m_{\text{p}} \cdot c \cdot \Delta t_{\text{pridaná}}$$

Určíme si teploné rozdiely: voda vo vani sa zohreje o $\Delta t_{\text{vo vani}} = t_1' - t_0$, pridaná voda sa ochladí o $\Delta t_{\text{pridaná}} = t_{\text{p}} - t_1'$ (Pôvodnú teplotu som si označil t_0, výslednú t_1' a teplotu pridanej vody t_{p}) Mernú tepelnú kapacitu vody c vykrátim a dostanem:

$$m_0(t_1' - t_0) = m_{\text{p}}(t_{\text{p}} - t_1')$$

$$m_0 t_1' - m_0 t = m_{\text{p}} t_{\text{p}} - m_{\text{p}} t_1'$$

$$m_0 t_1' + m_{\text{p}} t_1' = m_{\text{p}} t_{\text{p}} + m_0 t$$

$$t_1' = \frac{m_{\text{p}} t_{\text{p}} + m_0 t}{m_0 + m_{\text{p}}}$$

Môžeme dosadiť hodnoty ktoré sa nebudú meniť počas celého napúšťania vane:

$$t_1' = \frac{2\,\text{kg} \cdot 60℃ + m_0 t}{m_0 + 2\,\text{kg}}$$

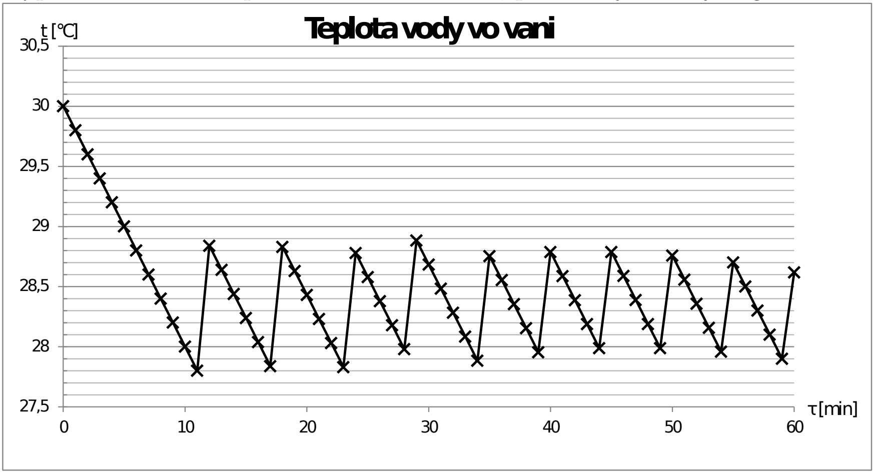
Tento vzorec použijeme na všetky ďalšie výpočty, už len dosadíme za hmotnosť vody vo vani m_0 a jej teplotu t. Teraz môžem začať vypĺňať tabuľku. Začnem s objemom 50 ℓ, teplotou 30℃. Každý nasledujúci riadok vyplním takto:

- Ak je aktuálna teplota menšia ako 28℃:

  - Vypočítam teplotu t_1' po dopustení teplej vody
  - odčítam od tejto hodnoty 0,2℃ (ochladzovanie), teda dostanem teplotu t_1. Tú zapíšem do nasledovného riadku tabuľky.
  - Objem zvýšim o $2\,\ell$.

- Ak nie je, iba odčítam od teploty 0,2℃, objem nezmením.

Vyplním tabuľku až po šesťdesiatu minútu, podľa nej zostrojím graf.



Bodovanie: *Kľúčový bol graf, ten bol až za* 2,5 *b. Za správne odvodenie a výpočet hodnôt bolo* 1,5 *b. Za fakt, že sa voda ochladí aj počas minúty keď sa prileje horúca voda bol* 1 *b. Ak ste do vane priliali horúcu vodu už keď vo vani bolo* 28°*C som body nestŕhal, iba ak sa to nezhodovalo s vaším popisom.*

Príklad 8 - Sušenie sliviek *opravoval Vladimír Macko - Vlejd*

Najprv si ujasníme situáciu. Máme slivky. Tie sú z istej časti tvorené vodou. Tá sa odparí a dostaneme sušené slivky respektíve slivkovú sušinu. Môžeme si teda slivky rozdeliť na vodu a slivkovú sušinu. Na začiatku sme mali aj vodu aj sušinu, na konci budeme mať len sušinu.

Teraz už „len“ porátame, koľko tej sušiny je a aká je ťažká. O objeme sušiny vieme, že je to objem sliviek, ktorý netvorí voda. Objem vody našťastie vieme porátať, lebo voda tvorí, zo zadania, 60% sliviek. Objem vody v slivkách je potom

$$V_{\text{vody}} = V_{\text{sliviek}} \cdot 0,60 = 1,5\,\ell \cdot 0,60 = 0,9\,\ell$$

Dostali sme, že 0,9l zo sliviek tvorí voda, a zvyšok je teda sušina. Potom

$$V_{\text{sušiny}} = V_{\text{sliviek}} - V_{\text{vody}} = 1,5\,\ell - 0,9\,\ell = 0,6\,\ell$$

Pozor! Neplatí, že sa odparí aj 60% hmotnosti. Porátať to ale aj tak vieme, lebo vieme, že $M_{\text{sliviek}} = M_{\text{sušiny}} + M_{\text{vody}}$ teda $M_{\text{sušiny}} = M_{\text{ sliviek}} - M_{\text{vody}}$

Nakoľko poznáme objem vody a aj jej hustotu, tak vieme vyrátať aj jej hmotnosť podľa vzťahu

$$M_{\text{vody}} = V_{\text{vody}} \cdot \rho_{\text{vody}} = 0,009\,\mathrm{m}^3 \cdot 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 0,9\,\mathrm{kg}$$

Výsledok dosadíme do vzorca $M_{\text{sušiny}} = M_{\text{sliviek}} - M_{\text{vody}} = 1\,\mathrm{kg} - 0,9\,\mathrm{kg} = 0,1kg$.

Máme teda všetko potrebné zrátané a prišli sme na to, že vysušené slivky budú mať objem $V_{\text{sušiny}} 0,6\,\ell = 0,0006\,\mathrm{m}^3$ a hmotnosť $M_{\text{sušiny}} = 0,1\,\mathrm{kg}$.

Bodovanie: *Vyrátanie objemu sušených sliviek:* 0, 5 *b*
Komentovanie postupu: 1 *b*
Vyrátanie hmotnosti sušených sliviek: 1, 5 *b*
Komentovanie postupu: 2 *b*