Celoslovenský korešpondenčný seminár z fyziky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOFYZ

16. ročník **www.pikofyz.sk** **šk. rok 2013/2014**

Vzorové riešenia 1. série zimnej časti

Príklad 1 - Trestný čin *opravovala Dominika Iždinská*

Celkový čas lupu si môžeme rozdeliť na 3 časti: čas cesty z konca vlaku k prvému vagónu, pobyt vo vlaku a čas cesty späť.

Najprv sa pozrime na Johnovu cestu k prvému vagónu. Vlak ide rýchosťou $v_1 = 45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, John ide rýchlosťou $v_2 = 60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, obaja v rovnakom smere. Keďže John ide rýchlejšie, po určitom čase dobehne prvý vagón vlaku. Vlak pri tom prejde dráhu s_1, John dráhu $s_1 + 150\,\mathrm{m}$, keďže sa chce dostať do vagóna vzdialeného $150\,\mathrm{m}$ od konca vlaku. Za rovnaký čas t_1 teda John prejde o $150\,\mathrm{m}$ viac ako vlak. Z toho už vieme zostrojiť rovnicu. Keďže $150\,\mathrm{m} = 0{,}15\,\mathrm{km}$, platí:

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} \qquad t_1 = \frac{s_1 + 0{,}15\,\mathrm{km}}{v_2} \Longrightarrow \qquad \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_1 + 0{,}15\,\mathrm{km}}{v_2}$$

$$v_2 s_1 = v_1(s_1 + 0{,}15\,\mathrm{km}) \qquad v_2 s_1 = v_1 s_1 + 0{,}15 v_1$$

$$s_1 = \frac{0{,}15 v_1}{(v_2 - v_1)} = \frac{0{,}15\,\mathrm{km}\cdot 45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - 45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}$$

Po dosadení dostávame $s_1 = 0{,}45\,\mathrm{km}$, čo je dráha, ktorú prešiel vlak počas Johnovho cvalu k prednému vagónu. John prešiel o $0{,}15\,\mathrm{km}$ viac, teda $0{,}6\,\mathbf{km} = 600\,\mathbf{m}$. Čas vyjadríme z niektorej z rovníc,

$$t_1 = \frac{0{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = \mathbf{0{,}01}\,\mathrm{h} = \mathbf{36}\,\mathrm{s}$$

Čas samotného lupu v snobskom vagóne bol $t_2 = 6\,\mathrm{min} = 360\,\mathrm{s}$. Pýtame sa, akú dráhu John precválal na svojom koni. Počas lúpenia však John necválal na koni, preto dráhu, ktorú prejde vlak za tento čas nerátame do výslednej dĺžky dráhy.

Tretí úsek tvorí Johnova cesta naspäť. Teraz je od konca vlaku vzdialený $0{,}15\,\mathrm{km}$ a približujú sa k sebe. Vieme, že dráha ktorú spolu prejdú je $0{,}15\,\mathrm{km}$ a John ide tentokrát rýchlosťou $v_3 = 55\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Čas si označíme t_3. Platí

$$s = s_2 + s_3 = v_1 t_3 + v_3 t_3 = t_3(v_1 + v_3)$$

$$t_3 = \frac{s}{v_1 + v_3}$$

po dosadení:

$$t_3 = \frac{0{,}15\,\mathrm{km}}{45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 55\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = \mathbf{0{,}0015}\,\mathrm{h} = \mathbf{5{,}4}\,\mathrm{s}$$

časť dráhy, ktorú z toho prešiel John vypočítame

$$s_3 = v_3 t_3 = 55\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 0{,}0015\,\mathrm{h} = \mathbf{0{,}0825}\,\mathrm{km} = \mathbf{82{,}5}\,\mathrm{m}$$

Teraz už nám stačí spočítať jednotlivé časy, aby sme dostali čas celého lupu:

$$\mathbf{36}\,\mathrm{s} + \mathbf{360}\,\mathrm{s} + \mathbf{5{,}4}\,\mathrm{s} = \mathbf{401{,}4}\,\mathrm{s}$$

Rovnako aj s dráhou:

$$600\,\mathbf{m} + 82{,}5\,\mathbf{m} = 682{,}5\,\mathbf{m}$$

Iný spôsob, (tiež správny), ako ste tento príklad počítali, bol uvažovať o Johnovej rýchlosti vzhľadom na vlak. V prvom prípade sa hýbal vzhľadom na vlak rozdielom ich rýchlostí - teda akoby sa pohyboval pri stojacom vlaku rýchlosťou $60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - 45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ - v druhom zase súčtom ich rýchlostí. Tu si však pri počítaní dráhy treba dať pozor, keďže dráhu počítame vzhľadom na stojacu zem, oproti ktorej sa John hýbal svojou skutočnou rýchlosťou.

Bodovanie: *Za každú z otázok ste mohli dostať po* 2,5 *boda. Z toho* 0,5 *boda za správnu odpoveď, zvyšné 2 body za Váš postup, popis riešenia a správne premeny jednotiek.*

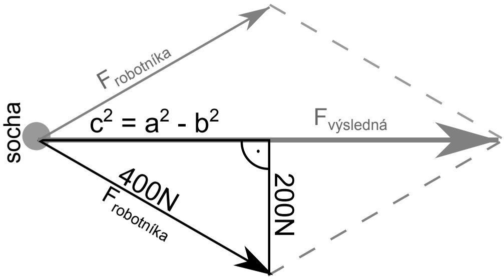
Príklad 2 - Ťahanice *opravovala Barbora Hoffmannová - Baša*

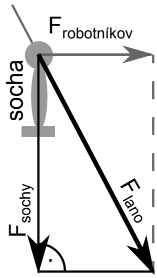
Pri tejto úlohe musíme postupovať po častiach. Najskôr si vypočítame akou silou pôsobia na sochu robotníci. Vieme, že zvierajú uhol 60 stupňov a obaja ťahajú silou 400 N. Keď sa nad tým zamyslíme, tak robotníci a socha tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka. Keď z tohoto trojuholníka zoberieme pravouhlú časť tak ako na obrázku, vznikne nám pravouhlý trojuholník. Jeho prepona (najdlhšia strana) bude sila jedného robotníka 400 N. Jednou jeho odvesnou bude polovica strany pôvodného rovnostranného trojuholníka, teda 200 N. Druhou odvesnou bude výška pôvodného trojuholníka, ktorá bude rovnaká ako polovica veľkosti výslednej sily.

Rovnica teda bude nasledovná:

$$\frac{F_{\text{výsledná}}}{2} = \sqrt{F^2_{\text{robotníka}} - \left(\frac{F_{\text{robotníka}}}{2}\right)^2} = \sqrt{400^2 - 200^2} = 346{,}4\,\mathrm{N}$$

Ako vidíme z obrázku, toto je len polovica sily robotníkov, preto $F_{\text{výsedná}} = 692{,}8\,\mathrm{N}$.





Ďalšia časť nášho výpočtu je určiť silu, ktorou pôsobí socha na hlavné lano. Vypočítame ju nasledovne.

$$F_{\text{sochy}} = m_{\text{sochy}} \cdot g = 550\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 5500\,\text{N}$$

Teraz poznáme obe sily, ktoré v našom príklade pôsobia. Ak si ich prekreslíme dostaneme znova pravouhlý trojuholník, kde sila, ktorou ťahajú robotníci je vodorovná a sila F_{sochy} je na ňu kolmá. Teraz prepona trojuholníka je výsledná sila, ktorá pôsobí na hlavné lano.

$$F_{\text{výsledná}} = \sqrt{F^2_{\text{výsedná sila robotníkov}} + F^2_{\text{sochy}}} = \sqrt{692{,}8^2 + 5500^2} = 5543{,}5\,\text{N}$$

Tento príklad môžeme riešiť aj graficky. Zostrojíme si rovnostranný trojuholník, s dĺžkou strany 4cm. Teda, každý $1\,\text{cm} \equiv 100\,\text{N}$. Je to trojuholník, ktorý znázorňuje akou silou pôsobia robotnici. Ak prenesieme jednu stranu trojuholníka tak, že spojíme silu akou pôsobia obaja robotníci a následne spojíme vrchol trojuholníka s bodom, ktorý sme dostali, dostaneme úsečku dlhú $7\,\text{cm}$. Teda dostaneme výslednú silu, ktorou pôsobia robotníci, teda $7\,\text{cm} \equiv 700\,\text{N}$. Zostrojíme ďalší trojuholník, ktorý bude pravouhlý. Bude znázorňovať výslednú silu, ktorá pôsobí na hlavné lano. Vodorovná úsečka bude sila, ktorou pôsobia robotníci, teda $1\,\text{cm} \equiv 700\,\text{N}$ a na ňu kolmá sila veľkosti $7{,}8\,\text{cm} \equiv 5500\,\text{N}$, čo je sila, ktorou pôsobí socha na samotné lano bez robotníkov. Prepona tohto trojuholníka bude mať veľkosť $7{,}9\,\text{cm} \equiv 5550\,\text{N}$.

Bodovanie: *Za vyjadrenie sily ktorou socha pôsobí na hlavné lano* 1 *b. Za vyjadrenie sily akou pôsobia robotníci* 1 *b. Ak ste dobre spojili tieto dve sily dohromady* 1 *b bod. Za pekné vysvetlenie riešenia* 1 *b bod a za nakreslenie pekného obrázku tiež* 1 *b bod.*

Príklad 3 - Kakaové more *opravoval Milan „Jimi“ Smolík*

Hustota je vlastnosť látok, ktorá popisuje pomer hmotnosti a objemu, teda akú hmotnosť by mal daný objem látky. Preto na jej nameranie potrebujeme poznať hmotnosť aj objem meranej látky.

Tie nameriam pomocou váhy (stačí kuchynská) a odmerného valca. Odmeriam si 100 ml každej tekutiny, ktorú potom položím na váhu z ktorej zistím hmotnosť. Pozor, toto je hmotnosť aj s odmerným valcom! Preto treba zistiť aj jeho hmotnosť a odčítať od nameraných hmotností tekutín.

Z nameraných hodnôt si viem vytvoriť tabuľku: Všade je objem 100 ml

Olej	Voda	Kakao
910 g	995 g	1030 g

Z týchto hodnôt už viem určiť hustoty jednotlivých látok na

Olej	Voda	Kakao
$910\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$	$995\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$	$1030\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

Z nameraných hodnôt vidíme, najnižšiu hustotu má olej, zatiaľ čo najhustejšie je kakao.

Mnohí ste použili experiment s jedným lievikom, do ktorého ste naliali všetky tekutiny a počkali ste kým sa ustália. Aj keď dostanem porovnanie hustôt látok (zistím ktorá je hustejšia), nepovie mi nič o konkrétnej hustote, ktorú ste mali merať.

A v ktorej sa najlepšie pláva? Mnohí ste správne poznamenali, že kakao bude lepšie nadnášať, keďže má vyššiu hustotu a preto sa v ňom bude lepšie plávať. Skúšali by ste však plávať v mede? Ten má vysokú hustotu, a predsa sa v ňom asi pláva zle… V skutočnosti je dôležitý aj odpor vody, ktorý je tým vyšší čím je hustejšia. Preto v kakau síce budem nadnášaný lepšie, ale celkovo pomalší. Olejom preplávam ako strela, ale musím sa viac snažiť aby som sa nepotopil.

Bodovanie: *Za postup experimentu bol* 1 *b, za hodnoty som udeľoval po* 1 *b a za diskusiu o ľahkosti plávania* 1 *b. Za nedostatočné vysvetlenie alebo veľmi nepresné výsledky som strhával až* 1 *b.*

Príklad 4 - USO *opravoval Tomáš Jančo - Janči*

Riešenie tohto príkladu môžeme rozložiť na dve časti: V prvej vypočítame minimálnu hmotnosť telesa a v druhej maximálnu.

Keď k telesu priviažeme balón, ten ho nadľahčuje silou, ktorá je rovná tiaži vzduchu balónom vytlačenej - Archimedov zákon. Nesmieme však zabudnúť, že hélium samotné má nejakú hmotnosť. Keďže sa teleso nevznieslo, vztlaková sila je menšia ako tiaž telesa s balónom. Zapíšeme to do rovnice:

$$F_{\mathrm{gUSO}} + F_{\mathrm{gHe}} \geq F_{\mathrm{vz}}$$

Tiažovú silu vyjadríme ako $F_{\mathrm{g}} = m \cdot g$

$$m_{\mathrm{USO}} \cdot \cancel{g} + m_{\mathrm{He}} \cdot \cancel{g} \geq \rho_{\mathrm{vzduch}} \cdot V_{\mathrm{He}} \cdot \cancel{g}$$

$$m_{\mathrm{USO}} \geq \rho_{\mathrm{vzduch}} V_{\mathrm{He}} - \mathrm{m}_{\mathrm{He}}$$

Hmotnosť hélia vyjadríme pomocou hustoty $m = \rho \cdot V$

$$m_{\mathrm{USO}} \geq \rho_{\mathrm{vzduch}} V_{\mathrm{He}} - \rho_{\mathrm{He}} V_{\mathrm{He}}$$

Objem balónu môžeme vyňať pred zátvorku

$$m_{\mathrm{USO}} \geq (\rho_{\mathrm{vzduch}} - \rho_{\mathrm{He}}) \cdot V_{\mathrm{He}}$$

Už len dosadíme:

$$m_{\mathrm{USO}} \geq (1{,}2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} - 0{,}18\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}) \cdot 112\,\mathrm{m}^3$$

$$m_{\mathrm{USO}} \geq 114{,}24\,\mathrm{kg}$$

Tu ešte upozorním, že sme zanedbali vztlakovú silu pôsobiacu na USO samotné. Keď sa však pozrieme ďalej, uvidíme že USO má dosť malý objem na to, aby táto sila bola významná.

Druhá časť je podobná, iba teleso je vo vode a je naňom položené 75 kg závažie. Teleso sa neponorilo, teda určite platí, že vztlaková sila je väčšia ako tiaž telesa so závažím.

$$F_{\mathrm{gUSO}} + F_{\mathrm{gz}} \leq F_{\mathrm{vz}}$$

$$m_{\mathrm{USO}} \cdot \cancel{g} + m_{\mathrm{z}} \cdot \cancel{g} \leq \rho_{\mathrm{voda}} \cdot V_{\mathrm{USO}} \cdot \cancel{g}$$

$$m_{\mathrm{USO}} \leq \rho_{\mathrm{voda}} \cdot V_{\mathrm{USO}} - m_{\mathrm{z}}$$

Do tejto rovnice nám však chýba objem USO. Môžeme ho odhadnúť - USO je tak veľké, že by sa doň zmestilo 5 chlapov. Priemerný chlap by sa zmestil do priemernej vane. Tá môže mať okolo $180\,\ell$. 5 chlapov teda bude mať objem $0{,}9\,\mathrm{m}^3$.

$$m_{\mathrm{USO}} \leq 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0{,}9\,\mathrm{m}^3 - 75\,\mathrm{kg}$$

$$m_{\mathrm{USO}} \leq 825\,\mathrm{kg}$$

Vyšlo nám teda, že USO váži najmenej 114,24 kg a najviac 825 kg.

Bodovanie: *Určenie minimálnej aj maximálnej hmotnosti bolo po* 2,5 *b.* 1 *b za popis situácie a zostavenie rovnice,* 1 *b za správny výsledok a* 0,5 *b za postup. Za nezarátanie hmotnosti hélia* −0,5 *b.*

Príklad 5 - Samoa Airlines *opravoval Ondrej Bogár - Bugý*

Tento zaujímavý príklad sme si nevymysleli, ale naozaj sa stal. Spôsobov ako určiť cenu leteniek bolo viacero a aj keď mali rôzny výsledok tak boli správne. A to preto, že každý z vás si mohol zvoliť inú stratégiu rozdelenie nákladov medzi cestujúcich. Hovoríme, že každý si spravil vlastný model. Každý model, ktorý bol dobre zdôvodnený a okomentovaný bol považovaný za správny.

Poďme sa teraz pozrieť na to ako sa dalo postupovať. 1600 kg je hmotnosť konštrukcie lietadla s plnou nádržou. Po odčítaní hmotnosti paliva máme hmotnosť lietadla samotného, a to $m_l = 1600\,\mathrm{kg} - \rho_{pal} V_{pal} = 1600\,\mathrm{kg} - 0,72 \cdot 450\,\ell = 1276\,\mathrm{kg}$. Ďalším krokom bolo zistenie spotreby paliva, lebo toľko paliva bude treba natankovať a teda aj zaplatiť a prejaví sa to aj v letiskovom poplatku. Spotreba paliva ale závisí od hmotnosti cestujúcich a preto musíme najskôr zistiť ako ťažkých máme cestujúcich. Ja budem predpokladať, že každý obyvateľ ostrova cestuje rovnako často a medzi cestujúcich budem rátať aj pilota. (mohli ste si vybrať, či pilota započítať alebo nie) Takže 75% z 10 ľudí na palube bude obéznych a zvyšok zdravý. Hmotnosť pasažierov bude potom 1100 kg. Ako ale môžem počítať so 7,5 človekom? No na jednom lete ťažko, ale keď bude tých letov už desať, tak to znamená 75 obéznych cestujúcich, čo je v poriadku. Takto môžem ale uvažovať len vtedy, keď tých letov bude veľa a potom to v priemere bude správne. Pri hmotnosti 1100 kg je spotreba paliva odčítaná z grafu $30\,\ell$ na 100 km. Teraz spočítam, koľko musia aerolinky zaplatiť za jednotlivé lety s takýmito priemernými pasažiermi.
SUVA: Potrebujeme $1650\,\mathrm{km} \cdot \frac{30\,\ell}{100 km} = 495\,\ell$ paliva, ktoré váži 357 kg. Cena za palivo bude potom 714$. Za letiskový poplatok potom zaplatia za hmotnosť lietadla + hmotnosť cestujúcich a hmotnosť paliva, čo je $1276\,\mathrm{kg} + 1100\,\mathrm{kg} + 357\,\mathrm{kg}$. Cena poplatku je 84$. Celkové náklady na let sa rozdelia medzi 9 pasažierov s priemernou váhou. Náklady na jeden kilogram pasažiera budú: 0,8$ Obézni budú platiť $0{,}8 \cdot 120\,\mathrm{kg} = 96\$$ a ostatní budú platiť $0{,}8 \cdot 80\,\mathrm{kg} = 64\$$
NIUE: Postupujeme rovnako, ale bude nám stačiť natankovať menej paliva lebo je to bližšie. Obézni budú platiť $0{,}55 \cdot 120\,\mathrm{kg} = 66\$$ a ostatní budú platiť $0{,}55 \cdot 80\,\mathrm{kg} = 44\$$. Pri týchto cenách nebudú aerolinky pri viacerých letoch v strate. Ak príde menej obéznych ľudí, tak budú v zisku a ak viac, tak v strate. Ale keď sa to spriemeruje cez napríklad 100 letov tak budú na nule. Nezapočítali sme tam ale napríklad náklady na údržbu, plat zamestnancov a podobne.

Zaujímavosťou ešte je pozrieť sa v tomto mojom modeli na prípad, keď budú všetci na palube obézni. Vtedy bude ich hmotnosť 1200 kg. Pri tejto hmotnosti je spotreba paliva asi $35\,\ell$, čo znamená, že na let do Suva potrebujeme $577\,\ell$ paliva. Toľko ale v nádrži nemáme, takže lietadlo by nedoletelo. Ako vyriešiť tento problém? Môžeme znížiť počet pasažierov na 8 a tým pádom budú drahšie letenky. Alebo môžeme dúfať, že sa takýto prípad nestane. A keď sa stane tak pre technickú poruchu aerolinky zrušia let.

Bodovanie: *Za správne odčítanie z grafu spotreby bol* 1 *b a za výpočty hmotnosti pasažierov a lietadla* 1 *b. Za vytvorenie modelu a jeho zdôvodnenie som dával* 3 *b.*