Celoslovenský korešpondenčný seminár z fyziky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOFYZ

16. ročník www.pikofyz.sk šk. rok 2013/2014

# Vzorové riešenia 1. série letnej časti

**Príklad 1 - Bill a Billík** *opravovala Zuzana Bogárová - Bum*

Ahojte!

Najskôr si povieme, čo sa tam deje. Kamienok z praku vletí do okna na jednej strane vagónu a na druhej strane vyletí z okna oproti. No kým kamienok prejde cez vagón, čo sú $3$ m, vlak sa o určitý kúsok posunie. Našim cieľom je zistiť, či čas, za ktorý preletí kamienok alebo guľka $3$ m široký vagón, je kratší, ako čas, za ktorý sa vlak posunie o vzdialenosť $1{,}5$ m, čo je šírka okna.

Veľmi podstatné je si popremieňať všetky jednotky, ktoré máme, na rovnaké. Poznáme rýchlosť vlaku $v_{\text{vlak}} = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 16{,}67\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Rýchlosť kamienka z praku $v_{\text{kamienok}} = 100\,\frac{\text{stôp}}{\text{s}} = 35\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ešte budeme potrebovať rýchlosť guľky, a tá je $v_{\text{guľka}} = 216\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Šírka vagónu, čiže vzdialenosť, ktorú musí prejsť kamienok alebo guľka, je $s_{\text{kamienok}} = 3$ m. No a dĺžka okna, čiže vzdialenosť, ktorú musí prejsť vlak, je $s_{\text{vlak}} = 1{,}5$ m.

Teraz spočítame, za aký čas prejde vlak vzdialenosť jedného okna, čiže $1,5$ m.

$$t_{\text{vlak}} = \frac{s_{\text{vlak}}}{v_{\text{vlak}}} = \frac{1{,}5\,\text{m}}{16{,}67\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0{,}089\,\text{s}$$

Spočítame čas, za ktorý preletí kamienok a guľka šírku vagónu. Ak tieto časy budú dlhšie ako $t_{\text{vlak}}$, tak nedokáže ani guľka ani kamienok preletieť vlak krížom.

Ideme na čas kamienka $t_{\text{kamienok}}$.

$$t_{\text{kamienok}} = \frac{s_{\text{kamienok}}}{v_{\text{kamienok}}} = \frac{3\,\text{m}}{35\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0{,}085\,\text{s}$$

Čo je menšie ako $t_{\text{vlak}}$, takže kamienok preletí vlakom krížom, aj keď to bude tesné. Teoreticky by sme už ďalej nemuseli počítať. Nastáva krátka úvaha. Podľa čísiel aj tak logicky vieme, že guľka vystrelená z koltu letí rýchlejšie ako nejaký kamienok z praku. A kedže kamienok z praku dokáže prestreliť vlak krížom, dokáže to aj guľka z koltu. No ale aj tak si to radšej spočítame.

Zisťujeme čas $t_{\text{guľka}}$.

$$t_{\text{guľka}} = \frac{s_{\text{kamienok}}}{v_{\text{guľka}}} = \frac{3\,\text{m}}{216\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0{,}0138\,\text{s}$$

Vidíme, že naša úvaha bola správna. Je nám teda jasné, že aj guľke, aj kamienku sa podarí preletieť krížom cez vlak.

Bodovanie: *Ak ste dobre odôvodnili, čo a ako počítate $2\ b$. Ak ste vypočítali hodnoty pre kamienok $1\ b$ a pre guľku z koltu $1\ b$. No a za správny výsledok $1\ b$.*

**Príklad 2 - Riekomer** *opravovala Alexandra Porembová - Saša*

Našou úlohou bolo čo najpresnejšie určiť prietok rieky. Prietok je množstvo (objem) vody, ktoré pretečie korytom rieky za jednu sekundu. Ako toto množstvo určíme? Môžeme si ho predstaviť ako hranol, ktorý má podstavu v tvare prierezu koryta a jeho dĺžka zodpovedá číselne rýchlosti prúdu. Rýchlosť prúdu nám totiž hovorí, o akú vzdialenosť sa „posunie" voda v priereze za 1 sekundu. Pre výpočet prietoku $Q$ teda použijeme vzťah

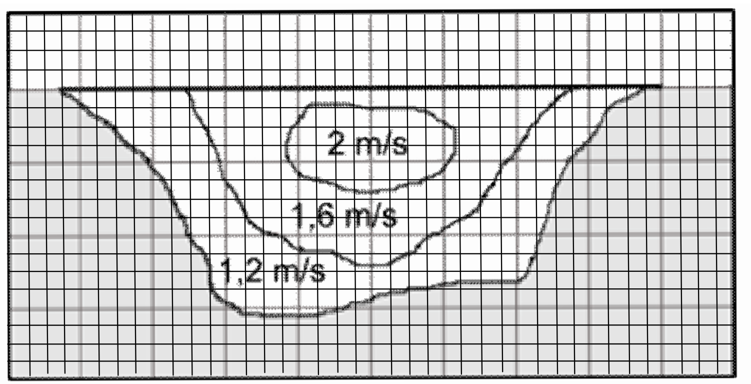
$$Q = S \cdot v$$

kde $S$ je plocha prierezu, pre ktorý prietok počítame, a $v$ je rýchlosť prúdenia vody cez tento prierez.

Správnosť našej úvahy potvrdí aj krátky pohľad na jednotky:

$$\text{plocha prierezu}\left[\,\mathrm{m}^2\,\right] \cdot \text{rýchlosť prúdenia}\left[\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\right] = \text{prietok}\left[\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\,\right]$$

Keďže však v rieke máme oblasti s tromi rôznymi rýchlosťami prúdenia, musíme vypočítať prietok pre každú oblasť zvlášť. V našom prípade to znamená najmä určiť obsah jednotlivých oblastí, pretože rýchlosti prúdenia už poznáme. To môžeme urobiť napríklad tak, že si do obrázku zo zadania dokreslíme hustejšiu sieť a pre každú oblasť potom spočítame počet malých štvorčekov $N$.




Vieme, že veľký štvorec má stranu dlhú $0{,}5\,\mathrm{m}$, a teda obsah $0{,}5\,\mathrm{m} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = 0{,}25\,\mathrm{m}^2$. Keďže je rozdelený na 16 menších, maličký štvorček má plochu $0{,}25/16 \doteq 0{,}016$. Teraz nám už nič nebráni vypočítať jednotlivé prietoky, ktoré sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

| $v\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ | N | $S\left[\text{m}^2\right]$ | $Q\left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right]$ |
|---|---|---|---|
| 2,0 | 36 | 0,6 | 1,1 |
| 1,6 | 94 | 1,5 | 2,4 |
| 1,2 | 108 | 1,7 | 2,0 |

Niektorí z vás obsahy určovali tak, že z častí štvorčekov skúšali skladať celé štvorce, čo bol tiež dobrý nápad.

Celkový prietok je potom súčet prietokov cez tieto tri oblasti (nie aritmetický priemer, ako si zopár z vás myslelo), teda približne $5{,}5\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$. Výsledok však, samozrejme, závisí najmä na presnosti vášho odhadu plochy.

Bodovanie: *Popis spôsobu určovania plôch prierezov a ich výpočet: $2\ b$, zdôvodnenie použitého vzorca a výpočet prietokov jednotlivými oblasťami: $2\ b$, výsledok ako súčet troch prietokov: $1\ b$.*

**Príklad 3 - Ryžový nákup** *opravovali Adela Mareková a Samo Kočiščák*

Úloha pozostávala z dvoch základných častí: *odhadu* a *vysvetlenia* odhadu. Väčšina z vás urobila správne odhady, niekoľkí ste mali numerické chyby, čo sme však nebrali do úvahy. Mnohým z vás však chýbal podrobný opis experimentu, údaje o použitom náradí, údaje o ryži. Odhad možno urobiť na základe rôznych vlastností ryže. Všeobecný postup je spočítať istú časť balíčka ryže a zistiť, koľkokrát sa v balíčku nachádza. Rozoberme si tri najčastejšie ukážkové spôsoby:

Prvý spôsob je odvážiť si rozumné množstvo ryže (to veľmi silno závisí od presnosti váhy, malo by byť aspoň 5-krát vyššie než presnosť váhy, ideálne 10-krát), čo je pre váhu s presnosťou $1$ g povedzme $10$ g ryže. Ja som použil guľatozrnnú ryžu značky SOS a v $10$ g tejto ryže som napočítal $1031$ zrniečok. Toto číslo mohlo vychádzať rôzne (od zhruba $400$ do zhruba $1300$ v $10$ g) a závisí od veľkého množstva faktorov, najmä druhu, veľkosti zŕn, ale aj od toho, ako vlhko je u Vás doma. Viem že $1$ kg $= 1000$ g $= 100 \times 10$ g. Keď viem, že v $10$ g mojej ryže je $1031$ zŕn, tak zistím, že v jednom kilograme bude $100 \times 1031 = 103100$ zŕn. Ako hovorím, výsledky mohli vychádzať veľmi rôzne, pričom všetky môžu byť správne.

Druhý spôsob je zistiť objem istého počtu zŕn, a to tak, že si napočítam rozumné množstvo (povedzme nie menej ako 250) zrniečok a odmeriam ich objem bez vzduchu medzi nimi. Ako? Do odmerného valca (alebo kuchynskej odmerky) nalejem trochu vody a nasypem zrniečka, ktorých počet poznám. Prírastok objemu je objem zŕn. Keďže poznám ich počet, tak podľa vzťahu:

$$V_{\text{1 zrna}} = \frac{V_{\text{n zrniecok}}}{n}$$

Teraz urobím to isté s celým balíčkom ryže a zistím objem všetkých zŕn v balíčku. Keďže poznám objem jedného zrna, viem poľahky zistiť počet zŕn ako:

$$N = \frac{V_{\text{vsetkych}}}{V_{\text{1 zrna}}}$$

Tento postup má však zásadnú nevýhodu v tom, že namočíme celé kilo ryže, ktoré treba následne uvariť (pretože vyhodiť je ho škoda), avšak dá sa optimalizovať, a to tak, že si odvážime $200$ g ryže a zistíme tak počet zŕn v $200$ g ryže, ktorý následne pre finálny výsledok vynásobíme $\times 5$.

Posledný spôsob, ktorý by som spomenul, je nasypať si kilo ryže do veľkého priesvitného pohára, odhadnúť (spočítať) koľko zrniečok sa nachádza v jednej $0,5$ cm vrstve a určiť, koľko takýchto vrstiev sa nachádza v pohári. Tento spôsob je však nepresný a dáva len veľmi hrubý odhad, preto ho neodporúčame ako samostatný spôsob, ale iba ako doplnok k inému, presnejšiemu spôsobu.

Samozrejme, za správne riešenie sme považovali aj akýkoľvek iný dostatočne presný a zrozumiteľne popísaný spôsob. Najlepšie možné riešenie bolo spočítať všetku ryžu, avšak to je veľmi časovo náročné, iba pre fajnšmekrov ;)

Bodovanie: *Za teoretický popis postupu ste mohli získať $1,5\ b$, za samotnú realizáciu (meranie, váženie a pod.) $1\ b$, za dostatočnú presnosť merania sme dávali $1\ b$, za zdôvodnenie, prečo je meranie dostatočne presné (napr. uvedenie presnosti váhy a prispôsobenie meranej vzorky tejto presnosti) bol $1\ b$ a za popis meranej ryže (najmä či ide o guľatozrnnú alebo dlhozrnnú ryžu) bolo $0,5\ b$. Za chybné úvahy, chyby v logike, nereálne výsledky sme desatinky bodu odrátali, plusové desatinky bodu sa dali získať za veľmi inovatívne myslenie, nápaditý experiment, veľmi vysokú presnosť merania (najmä viacnásobne opakované meranie) a pod.*

**Príklad 4 - Zlodejská fuška** *opravoval Ondrej Bogár - Bugẏ*

V prvom rade chcem upozorniť čitateľa tohto vzorového riešenia, že tento text nie je návodom na to, ako pomocou plazmového horáku otvoriť trezor.

Poďme ale teraz k samotnému príkladu. Všetko vypočítame pomocou kalorimetrickej rovnice. Najskôr potrebujeme dodať kovu toľko tepla, aby sa zohrial z pôvodnej teploty ($t_0$) na teplotu topenia ($t_t$). Potom ešte musíme dodať toľko tepla, aby sa už zohriaty kov aj roztopil.

$$Q = \underbrace{mc(t_t - t_0)}_{\text{zohriatie}} + \underbrace{ml_t}_{\text{roztopenie}}$$

Na vyriešenie ešte potrebujeme vedieť hmotnosť taveného kovu. Šedá plocha na obrázku v zadaní sa nachádza medzi štvorcom s hranou $52$ cm a menším štvorcom s hranou $50$ cm. Ľahko vypočítame obsah šedej plochy, ako rozdiel obsahov týchto dvoch štvorcov.

$$S = (52\,\text{cm} \cdot 52\,\text{cm}) - (50\,\text{cm} \cdot 50\,\text{cm}) = 204\,\text{cm}^2$$

Keď túto plochu vynásobíme hrúbkou a hustotou titánu, zistíme hmotnosť tavenej časti trezoru. Na internete alebo v tabuľkách si nájdeme hustotu titánu, ktorá je približne $\rho_{Ti} = 4500\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Hmotnosť kovu, ktorý bude treba roztaviť, potom bude $6,42$ kg.

Teplo už vieme vypočítať, pretože poznáme všetky veličiny. Na vypočítanie výkonu potrebujeme ešte celkové teplo (energiu alebo prácu) vydeliť časom, za ktorý teplo dodáme:

$\tau = 30\,\text{s}$. Teraz to už len všetko aj so správnymi jednotkami dosadíme do vzorca a vypočítame výkon.

$$P = \frac{mc(t_t - t_0) + ml_t}{\tau}$$

$$P = \frac{6,42\,\text{kg} \cdot 520\,\frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}(1668^\circ\text{C} - 23^\circ\text{C}) + 6,42\,\text{kg} \cdot 302000\,\frac{\text{J}}{\text{kg}}}{30\,\text{s}}$$

$$P = 247\,\text{kW}$$

Bodovanie: *Za výpočet hmotnosti kovu* $0,5$ $b$*. Za vysvetlenie, ako budem počítať a za nájdenie hustoty titánu* $1,5$ $b$*. Za výpočet potrebného tepla* $2$ $b$ *a za výpočet potrebného výkonu* $1$ $b$*.*

**Príklad 5 - Vyvažovačka** *opravoval Peter Dupej*

Najprv si bolo treba uvedomiť, že hojdačka je uchytená v jednom bode. To znamená, že sa môže nakláňať do všetkých strán, napríklad doľava a doprava (pozdĺž vertikálnej osi) alebo hore a dole (pozdĺž vodorovnej osi).

Ďalej si stačilo uvedomiť, že hojdačka sa v každom smere správa ako páka. Tu platí momentová veta: každá sila pôsobiaca na páku vytvára moment sily, pre ktorý je dôležitá iba veľkosť sily a vzdialenosť jej pôsobiska - od osi otáčania. Preto sme skutočný tvar ramien hojdačky mohli odignorovať (a nahradiť napríklad štvorcom). Rovnováha nastane, keď sa momenty v opačných smeroch budú rovnať.

Pozrime sa najprv na náklony doľava a doprava. Predstavme si, že hojdačku namiesto jedného bodu v strede uchytíme v stredoch strán AB a CD tak, aby sa mohla nakláňať iba doľava a doprava. Z momentovej vety vyplýva, že súčet momentov, ktoré spolu vytvárajú Adam a Cyril, musí byť rovnaký, ako súčet momentov Braňa a Danky. Keďže hojdačka je prakticky štvorec, vzdialenosti všetkých detí od vertikálnej osi sú rovnaké. Pre moment sily platí vzťah $M = Fr$ a každý pôsobí svojou tiažou $F = mg$. Podmienku pre rovnováhu v pravo-ľavom smere po vykrátení $gr$ môžeme zapísať nasledujúcou rovnicou.

$$M_1 = M_2$$

$$m_A gr + m_C gr = m_B gr + m_D gr$$

$$m_A + m_C = m_B + m_D$$

Poznáme hmotnosti Adama, Braňa aj Danky, takže aby bola hojdačka vyvážená v pravo-ľavom smere Cyril by musel vážiť $m_C = m_B + m_D - m_A = 35\,\text{kg}$.

To však nie je všetko. Hojdačka sa môže nakláňať aj v druhom smere (hore a dole). Preto musíme vyrátať ešte druhú podmienku. Uchyťme si teraz hojdačku v stredoch strán AC a BD (pozdĺž vodorovnej osi) a zopakujeme proces pre rovnosť momentov tvorených Adamom a Braňom na jednej strane a Cyrilom a Danku na druhej strane tak, ako v predošlom prípade. Dostaneme druhú podmienku.

$$m_A + m_B = m_C + m_D$$

Z tejto podmienky vyplýva, že Cyril by musel vážiť $m_C = m_A + m_B - m_D = 65$ kg. Keďže Cyril nemôže vážiť naraz aj $35$ kg aj $65$ kg, hojdačka sa nedá vyvážiť.

Dokázať, že hojdačka sa vyvážiť nedá, sa dá aj tak, že sa pozrieme na problém ako na dve sústavy rovníc. Každá popisuje jeden smer nakláňania a obe musia platiť zároveň. Ak odpočítame od oboch rovníc $m_D$, od hornej odpočítame $m_C$ a od spodnej $m_B$, dostaneme nasledujúce dve rovnice.

$$m_A - m_D = m_B - m_C$$

$$m_A - m_D = m_C - m_B$$

Tu vidíme, že ľavá strana oboch rovníc je rovnaká, preto pravé strany musia tiež rovnať $m_B - m_C = m_C - m_B$. Teraz ak pripočítame k obom stranám $m_B + m_C$, dostaneme $2m_B = 2m_C$ a po vydelení dvoma $m_B = m_C$. To znamená, že Braňo a Cyril musia vážiť rovnako. Teraz môžeme v hociktorej z rovníc vyššie nahradiť $m_B$ za $m_C$ a po úpravách dostaneme podobný vzťah pre Adama a Danku $m_A = m_D$.

Tieto vzťahy pre diagonály sa dajú odvodiť aj priamo z momentov. Stačí vyjadriť rovnovážne podmienky pre momenty voči diagonálnym osiam. Napríklad pre osu medzi Braňom a Cyrilom platí, že moment tvorený Adamom a moment tvorený Dankou musia byť rovnaké, pretože Braňo a Cyril netvoria nijaký moment, keďže ich vzdialenosť od tejto osi je nula. To isté platí pre os medzi Adamom a Dankou. Ich ramená sú nula, takže jediné momenty voči osi medzi nimi sú tvorené Braňom a Cyrilom. Všetky ramená sa vykrátia, lebo hojdačka je štvorec a každá dvojica sedí rovnako ďaleko od bodu podopretia, a tak z rovností momentov medzi osobami na diagonálach oproti sebe dostaneme vzťahy pre hmotnosti.

$$m_A = m_D$$

$$m_B = m_C$$

Ako sme sa už dozvedeli vyššie, hojdačka sa Cyrilom nedá vyvážiť, lebo už zo zadania Adam a Danka porušujú svoju podmienku.

Bodovanie: *Existovalo veľa rôznych možností ako sa dopracovať k správnemu výsledku, preto bolo ťažké vymyslieť jednoduché bodovanie. V podstate, iba za správny výsledok bez výpočtov a vysvetlenia bol $1$ $b$, za výpočet bez vysvetlenia ďalšie $2$ $b$ a za správne vysvetlenie ďalšie $2$ $b$. Samozrejme za neúplné vysvetlenia alebo čiastočné výpočty bolo menej bodov.*