Vzorové riešenia 2. série zimnej časti

Príklad 1 - Hustý croissant *opravovali Adel Mareková & Samo Kočiščák*

Znenie zadania napovedá, že croissanty asi nebudú úplne rovnaké, aj napriek tomu, že ich popisy (tretina hmotnosti a treitina objemu) znejú dosť podobne. Pre každý croissant (a vo všeobecnosti aj pre akýkoľvek iný predmet zložený z 2 rôznych materiálov) platí vzťah:

$$m_{\text{celk}} = m_{\text{cok}} + m_{\text{pec}}$$

Jednotlivé hmotnosti môžme podľa vzťahu $\rho = \frac{m}{V}$ upraveného do tvaru $m = \rho \cdot V$ rozpísať ako: $\rho_{\text{priem}} \cdot V_{\text{celk}} = \rho_{\text{cok}} \cdot V_{\text{cok}} + \rho_{\text{pec}} \cdot V_{\text{pec}}$. Takisto vieme, že pre celkový objem platí vzťah pre objem: $V_{\text{celk}} = V_{\text{pec}} + V_{\text{cok}}$. To vyplýva z toho, že croissant sa skladá len z pečiva a čokolády.

Pre Miškin croissant (ten, v ktorom tvorila čokoláda tretinu objemu) vieme vypočítať priemernú hustotu dvojako. Buď najprv vypočítame celkový objem, a jednotlivé hmotnosti zložiek, ako to spravilo mnoho z Vás, alebo priemernú hustotu vyjadríme zo vzťahu pre súčet hmotností. Ukážeme si druhý postup, keďže je jednoduchší a rýchlejší. Zapíšme rovnicu pre súčet objemov: $V_{\text{celk}} = V_{\text{pec}} + \frac{1}{3} \cdot V_{\text{celk}}$

V tomto vyjadrení sme člen popisujúci objem čokolády nahradili tretinou objemu celého croissantu. Z tohto vzťahu potom vyplýva aj to, že celý zvyšok objemu okrem čokolády je pečivo: $V_{\text{pec}} = \frac{2}{3} \cdot V_{\text{celk}}$

Zapíšme si teraz vzťah pre celkovú hmotnosť Miškinho croissantu, kde použijeme vzťah $m = \rho \cdot V$:

$$\rho_{\text{priem}} \cdot V_{\text{celk}} = \rho_{\text{cok}} \cdot \frac{1}{3} \cdot V_{\text{celk}} + \rho_{\text{pec}} \cdot \frac{2}{3} \cdot V_{\text{celk}}$$

Všimnime si, že v tomto vzťahu poznáme všetky konštanty, okrem celkového objemu croissantu. Vyjadrime si priemernú hustotu:

$$\rho_{\text{priem}} = \frac{\rho_{\text{cok}} \cdot \frac{1}{3} \cdot V_{\text{celk}} + \rho_{\text{pec}} \cdot \frac{2}{3} \cdot V_{\text{celk}}}{V_{\text{celk}}} = \rho_{\text{cok}} \cdot \frac{1}{3} + \rho_{\text{pec}} \cdot \frac{2}{3}$$

Už nám stačí len dosadiť konštanty hustôt zo zadania:

$$\rho_{\text{priem}} = 1350 \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{1}{3} + 80 \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{2}{3} \approx 503,3 \frac{kg}{m^3}$$

Pre zistenie priemernej hustoty Jankovho croissantu (ten, kde je tretina objemu tvorená čokoládou) môžme taktiež postupovať dvojako. Najprv si ukážeme jednoduchší postup:

Vieme, že tretinu hmotnosti Jankovho croissantu tvorí čokoláda, takže vieme vypočítať jej hmotnosť. Zároveň vieme, že zvyšok croissantu tvorí pečivo, takže ho tam je

$$m_{\text{cok}} = \frac{1}{3} \cdot m_{\text{celk}} \approx 21,3g \qquad m_{\text{pec}} = m_{\text{celk}} - m_{\text{cok}} \approx 42,7g$$

Platí vzťah $V = \frac{m}{\rho}$, takže vieme určiť objemy čokolády a pečiva:

$$V_{\text{cok}} = \frac{m_{\text{cok}}}{\rho_{\text{cok}}} \approx 15,8cm^3 \qquad V_{\text{pec}} = \frac{m_{\text{pec}}}{\rho_{\text{pec}}} \approx 533,8cm^3$$

Teraz už poznáme všetky parametre croissantu a môžme vypočítať jeho priemernú hustotu:

$$\rho_{\text{priem}} \cdot V_{\text{celk}} = \rho_{\text{cok}} \cdot V_{\text{cok}} + \rho_{\text{pec}} \cdot V_{\text{pec}} = \frac{\rho_{\text{cok}} \cdot V_{\text{cok}} + \rho_{\text{pec}} \cdot V_{\text{pec}}}{V_{\text{celk}}}$$

Keďže platí $V_{\text{celk}} = V_{\text{pec}} + V_{\text{cok}}$, tak:

$$\rho_{\text{priem}} = \frac{\rho_{\text{cok}} \cdot V_{\text{cok}} + \rho_{\text{pec}} \cdot V_{\text{pec}}}{V_{\text{cok}} + V_{\text{pec}}}$$

Po dosadení hustôt zo zadania a nami vypočítaných objemov zistíme, že $\rho_{\text{priem}} \approx 0,1165\frac{g}{cm^3} = 116,5\frac{kg}{m^3}$

O niečo zložitejším postupom vieme opäť zistiť priemernú hustotu aj bez toho, aby sme poznali celkovú hmotnosť croissantu. Vieme, že pre Jankov croissant platí vzťah: $m_{\text{cok}} = \frac{1}{3} \cdot m_{\text{celk}}$, z toho potom vyplýva, že zvyšok tvorí pečivo: $m_{\text{pec}} = \frac{2}{3} \cdot m_{\text{celk}}$. Vyjadrime si z prvej rovnice celkovú hmotnosť: $m_{\text{celk}} = 3 \cdot m_{\text{cok}}$. Dosadíme túto celkovú hmotnosť do druhej rovnice a zistíme, aká je závislosť hmotnosti pečiva od hmotnosti čokolády:

$$m_{\text{pec}} = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot m_{\text{cok}} = 2 \cdot m_{\text{cok}}$$

Nahraďme jednotlivé hmotnosti rozpísanými tvarmi za použitia hustôt:

$$\rho_{\text{pec}} \cdot V_{\text{pec}} = 2 \cdot \rho_{\text{cok}} \cdot V_{\text{cok}}$$

Teraz z tohto vzťahu vyjadrime objem pečiva:

$$V_{\text{pec}} = \frac{2 \cdot \rho_{\text{cok}} \cdot V_{\text{cok}}}{\rho_{\text{pec}}}$$

Vieme, že platí vzťah pre súčet hmotností:

$$\rho_{\text{priem}} \cdot V_{\text{celk}} = \rho_{\text{cok}} \cdot V_{\text{cok}} + \rho_{\text{pec}} \cdot V_{\text{pec}}$$

Platí taktiež $V_{\text{celk}} = V_{\text{pec}} + V_{\text{cok}}$. Spojením týchto vzťahov zistíme, že:

$$\rho_{\text{priem}} \cdot (V_{\text{pec}} + V_{\text{cok}}) = \rho_{\text{cok}} \cdot V_{\text{cok}} + \rho_{\text{pec}} \cdot V_{\text{pec}}$$

Už však vieme objem pečiva nahradiť objemom čokolády:

$$\rho_{\text{priem}} \cdot (\frac{2 \cdot \rho_{\text{cok}} \cdot V_{\text{cok}}}{\rho_{\text{pec}}} + V_{\text{cok}}) = \rho_{\text{cok}} \cdot V_{\text{cok}} + \rho_{\text{pec}} \cdot \frac{2 \cdot \rho_{\text{cok}} \cdot V_{\text{cok}}}{\rho_{\text{pec}}}$$

Po vydelení objemom čokolády dostávame vzťah:

$$\rho_{\text{priem}} \cdot (\frac{2 \cdot \rho_{\text{cok}}}{\rho_{\text{pec}}} + 1) = \rho_{\text{cok}} + \rho_{\text{pec}} \cdot \frac{2 \cdot \rho_{\text{cok}}}{\rho_{\text{pec}}}$$

$$\rho_{\text{priem}} \cdot (2 \cdot \rho_{\text{cok}} + \rho_{\text{pec}}) = 3 \cdot \rho_{\text{cok}} \cdot \rho_{\text{pec}}$$

Už len vyjadríme priemernú hustotu:

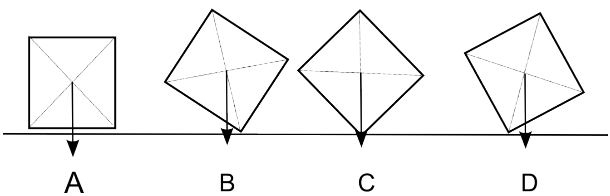
$$\rho_{\text{priem}} = \frac{3 \cdot \rho_{\text{cok}} \cdot \rho_{\text{pec}}}{2 \cdot \rho_{\text{cok}} + \rho_{\text{pec}}}$$

Po dosadení hustôt zo zadania zistíme, že: $\rho_{\text{priem}} \approx 116,5\frac{kg}{m^3}$. Teda sme zistili, že Miškin croissant je hustejší, než Jankov.

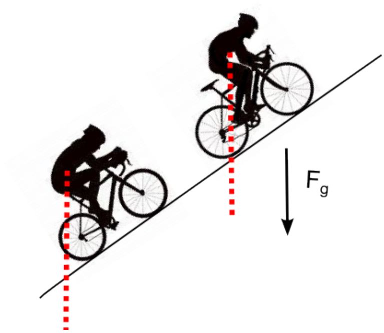
Bodovanie: *Za zistenie celkového objemu Miškinho croissantu $1,5\ b$ a za následné zistenie jeho priemernej hustoty $1\ b$. Za vypočítanie hmotnosti čokolády a pečiva v Jankovom croissante $0,5\ b$, za objem cesta a čokolády Jankovho croissantu $0,5\ b$, za celkový objem Jankovho croissantu $0,5\ b$ a za následný výpočet jeho priemernej hustoty $1\ b$. Alebo $5\ b$ za akýkoľvek iný správny postup.*

Príklad 2 - Horská prémia *opravoval Ondrej Bogár - Bug$\dot{y}$*

Najprv sa poďme pozrieť na to, kedy sa teleso prevráti. Ukážeme si to na takom klasickom fyzikálnom telese ako je kocka. Kocka v polohe A sa nikam neprevráti, lebo je v stabilnej polohe. Pri pohľade na kocku B je zrejmé, že sa prevráti smerom doľava. Gravitačná sila pôsobí v ťažisku kocky. Kocka sa otáča okolo svojej hrany a preto gravitačná sila pôsobí momentom sily, ktorý kocku otáča. Kocka D sa z tohto istého dôvodu otočí smerom doprava. Otázkou je, kedy nastane okamih, že sa už kocka neotáča doľava, ale doprava. V prípade kocky C je ťažisko kolmo nad hranou a preto rameno sily je rovné nule. Preto aj moment sily je nulový a kocka by mala ostať stáť na hrane. Každý, kto to skúšal vie, že to tak nie je. A to preto, že akékoľvek malé vychýlenie na jednu alebo druhú stranu spôsobí, že moment sily už nebude nulový a kocka sa prevráti.



Takže teraz už vieme, že hraničná situácia, kedy dôjde k prevráteniu, je keď je ťažisko nad bodom okolo ktorého sa predmet otáča. Keďže bicykel ako taký sa nemení, tak rozdiel spôsobí len to, či jazdec stojí alebo sedí. Ak jazdec stojí, tak má ťažisko viac vpredu, lebo sa môže predkloniť. Nakreslime si teraz obrázok a zistime, pri akom náklone sa dostane ťažisko nad zadné koleso. Výsledok môžete vidieť sami.

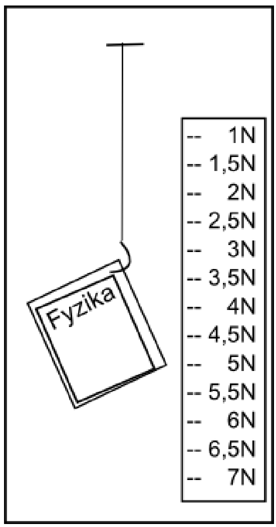


Z obrázku, že zrejmé, že čím je ťažisko viac vzadu tým menší náklon stačí na preklopenie. Preto do strmého stúpania je lepšie stáť.

Bodovanie: *Nakreslenie polohy ťažiska jazdca na bicykli $1\ b$. Vysvetlenie kedy príde k prevráteniu $2\ b$ a nakreslenie obrázku pri stúpaní $1\ b$. Za slovný komentár a zdôvodnenie $1\ b$.*

Príklad 3 - To je sila! *opravovala Zuzana Bogárová - Bum*

Ahojte. Vašou úlohou bolo zostrojiť zariadenie na meranie sily. V zadaní je napísané, že nameranú silu máme vedieť rovno odčítať z očíslovanej stupnice s aspoň desiatimi dielikmi. Je veľa možností ako si doma postaviť vlastný silomer a my si tu jeden povieme. Tak poďme na to.



Vezmem si drevenú dosku a do vrchu zatlčiem klinec. Na klinec zavesím krajčírsku gumu a na spodok krajčírskej gumy zavesím háčik. Pozdĺž gumy nalepím na dosku papier, aby sme na ňom mohli mať stupnicu. Ale ako takú stupnicu vyrobiť? Veľa z Vás si tú stupnicu len tak cuclo z prsta - doplnilo podľa pravítka. To ale nie je správny postup, lebo nevieme, či dieliky stupnice budú rovnomerné. Preto to spravím takto: na háčik zavesím odvážené vedierko. Následne do neho dolejem vodu tak, aby aj s vodou vážilo 100 g. Tam, kde sa nachádza háčik zaznačím na papieri čiarku a dopíšem tam hodnotu 1 N. Dolievam po 50 ml vody, čo mi na stupnici spraví dieliky o šírke $0,5$ N. Takýmto spôsobom si spravím dostatočne veľkú stupnicu.

Teraz chcem odmerať ťiažovú silu pôsobiacu aspoň na tri učebnice. Učebnicu vložím do euroobalu a zavesím ju na môj silomer. Z mojej stupnice odčítam hodnotu a toto meranie zopakujem pre každú učebnicu. Moje výsledky sú: učebnica fyziky - $3,5$ N, učebnica geografie 4 N a učebnica biológie 5 N.

Prikladám obrázok môjho prístroja.

Bodovanie: *Za popis výroby silomeru ste dostali $2\ b$. Ak ste na silomeri vyrobili správnym spôsobom 10 dielikovú stupnicu $1\ b$. Za fotku alebo nákres ste dostali $1\ b$ a za odmeranie* *ťiažovej sily pôsobiacej na tri veci bol $1\ b$.*

Príklad 4 - Poník *opravoval Matej Duník - Matt*

Poníkom poháňaný stroj je vlastne čerpadlo. Má za úlohu čerpať vodu nepretržite rýchlosťou 75 litrov za minútu. To znamená, že všetky vedrá pohybujúce sa nahor smerom k malému kolesu, sú plné vody. Tie, ktoré sa pohybujú dole, sú prázdne. Poník teda musí dvíhať iba vodu, lebo vedrá sa navzájom vyvážia a takisto lano na oboch stranách malého kolesa. Treba ju dvíhať silou, ktorá má rovnakú veľkosť ako gravitačná. Spočítam ju. Viem, že vodu ťaháme z hĺbky 50 metrov. Na špagáte je uviazané jedno vedro každé 2 metre $\left(\frac{1\,\text{vedro}}{2\,\text{m}}\right)$, v každom vedre je 5 litrov vody $\left(\frac{5\,\ell}{1\,\text{vedro}}\right)$, pomocou hustoty spočítam hmotnosť a tú vynásobím gravitačným zrýchlením a dostanem silu.

$$F_\text{g} = 50\,\text{m} \cdot \frac{1\,\text{vedro}}{2\,\text{m}} \cdot \frac{5\,\ell}{1\,\text{vedro}} \cdot \frac{1\,\text{kg}}{1\,\ell} \cdot \frac{10\,\text{N}}{1\,\text{kg}} = 1250\,\text{N}$$

Ak chceme, aby poník vytiahol každú minútu 75 litrov, znamená to, že potrebuje za minútu vytiahnúť $75\,\ell \cdot \frac{1\,\text{vedro}}{5\,\ell} = 15$ vedier a keďže jedno vedro je uviazaných každé 2 metre, treba vytiahnúť každú minútu 30 metrov lana.

Na vytiahnutie 30 metrov lana je teda potrebné vykonať prácu $W = 30\,\text{m} \cdot 1250\,\text{N} = 37500\,\text{J}$. Celá práca, ktorú poník vykoná sa premení na ťahanie lana, takže aj poníkovi stačí každú minútu vykonať rovnakú prácu, teda 37500 joulov. Jeho výkon teda bude $P = \frac{W}{t} = \frac{37500\,\text{J}}{1\,\text{min}} = \frac{37500\,\text{J}}{60\,\text{s}} = 625\,\text{W}$.

Za jednu minútu potiahneme lano o 30 metrov. Jedno otočenie malého kolesa vytiahne lano o 9 metrov, takže pri 30 metroch sa koleso otočí $\frac{30}{9} = \frac{10}{3}$ krát. To znamená, že sa otočí o $\frac{10}{3} \cdot 36 = 120$ zubov (teda podľa obrázka v zadaní sú to skôr kolíky, nie zuby).

Zuby veľkého a malého kolesa sa striedajú, takže ak sa malé koleso otočí za minútu o 120 zubov, musí sa aj veľké otočiť o 120 zubov. Veľké má dohromady 63 zubov, takže spraví za minútu $\frac{120}{63}$ otočiek. Za jednu jeho otočku prejde poník 21 metrov, takže za $\frac{120}{63}$ otočiek prejde $\frac{120}{63} \cdot 21\,\text{m} = 40\,\text{m}$.

Jeho rýchlosť musí byť $\frac{40\,\text{m}}{1\,\text{min}} = \frac{40\,\text{m}}{60\,\text{s}} = \frac{2\,\text{m}}{3\,\text{s}} \doteq 0{,}67\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 2{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Niektorí z vás pochopili zadanie tak, že na začiatku minúty sú všetky vedrá prázdne a poník teda musí vytiahnúť $50\,\text{m}$ lana po prvé vedro a ešte ďalších $28\,\text{m}$ po pätnáste vedro. V takom prípade by musel ísť rýchlejsie: $6{,}24\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a jeho maximálny výkon by bol približne $2{,}17\,\text{kW}$. Za správne a dobre odôvodnené riešenie takéhoto zadania ste tiež mohli získať plný počet bodov.

Pri riešení ste si ešte mohli všimnúť, že potrebný výkon vôbec nezáleží od toho, ako vyzerá stroj. Ako to? Dôležité je uvedomiť si, že celý stroj neobsahuje žiadny zdroj energie, ani energiu neukladá/nestráca. Všetka práca, ktorú vykoná poník sa priamo minie na zdvíhanie vedier. Podoba stroja teda nijako neovplyvní potrebný výkon. Čo ale podoba stroja ovplyvní je rýchlosť, akou poník kráča a sila akou musí pôsobiť.

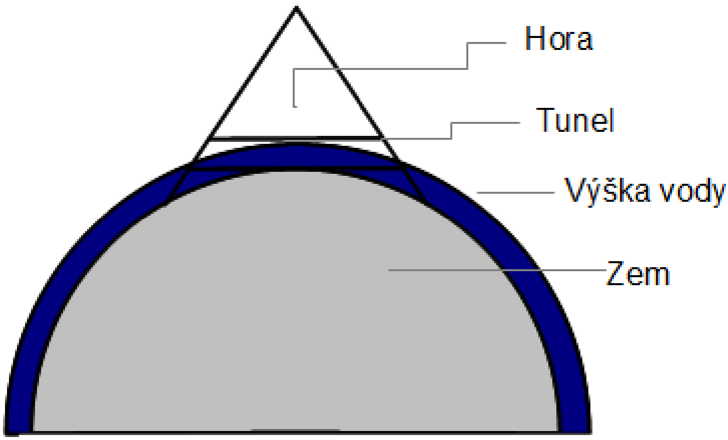
Bodovanie: *Za výpočet rýchlosti poníka $1{,}5\ b$, za výpočet výkonu poníka $1{,}5\ b$, za slovný komentár k obom častiam $2\ b$.*

Príklad 5 - Trpasličí tunel *opravoval Milan Smolík- Jimi*

Trpaslíci sa nemýlili, a strop sa naozaj približoval. Pri tom keď si skontrolovali rovnosť tunelu laserom, stále bol strop rovný! Aj vodováha ukazovala rovnú hladinu! Keď by sa pozreli na nadmorskú výšku, na lodi by namerali rovnakú, lebo stále pláva po hladine. Ak by však merali nadmorskú výšku stropu, tá by sa menila.

Voda je totiž celý čas priťahovaná gravitáciou, priamo do ťažiska Zeme, teda do jej stredu. Táto sila spôsobí, že všetká voda je v tvare gule a teda jej povrch je zakrivený. Na laserový lúč však gravitácia (v Newtonovskej fyzike) nepôsobí a preto sa svetlo šíri po priamke.

Preto bude náš tunel vyzerať asi takto:



Tunely sa preto vŕtajú nie rovno podľa lúča svetla, ale podľa vodováhy a nadmorskej výšky - teda strop aj podlaha sú celý čas v rovnakých nadmorských výškach a sú rovnobežné, a tým pádom kopírujú povrch gule. Nadmorská výška je totiž vždy kolmá vzdialenosť od povrch mora teda od povrchu gule. Takto vytvoríme dve sústredné kružnice so stredom v ťažisku Zeme.

Bodovanie: *Za správne určenie tvaru hladiny* $2\ b$*, Za vysvetlenie že sa jedná o problém gravitácie* $1\ b$ *Za správny tvar tunelu* $2\ b$*.*