



Vzorové riešenia 2. série letnej časti

Príklad 1 - Čarovný lektvar *opravovala Adela Mareková*

Tento príklad riešime v dvoch krokoch. Najprv vypočítame pomer čarovnej esencie a vody v babkinom čarovnom nápoji. Na začiatku máme čistú esenciu, teda koncentrácia je 100% = 1. Vieme, že do prvého miešania namiešala 99 kvapiek vody a 1 kvapku esencie. Z toho vypočítame, že koncentrácia po prvom miešaní je $\frac{1}{100} = 0,01 = 10^{-2}$. Pri každom ďalšom premiešaní babka pridáva do esencie 1 kvapku z predošlého miešania a 99 kvapiek vody, z čoho vyplýva, že každé ďalšie meranie bude mať 100x menšiu koncentráciu čarovnej esencie. Po druhom miešaní už túto koncentráciu môžeme vypočítať ako $\frac{0,01}{100} = 0,0001$ čo je 10^{-4} . Po treťom miešaní to bude $\frac{0,0001}{100} = 0,000001 = 10^{-6}$. Môžeme vidieť, že po každom miešaní je koncentrácia nižšia o dva rády. Po n-tom miešaní to teda bude 10^{-2n} . Takže po 15. miešaní bude mať babka bylinkárka čarovný napoj s koncentráciou $10^{-30} = 10^{-28}\%$.

Čo sa týka mágovho lektvaru, najdôležitejšie je dobre premeniť jednotky. $1 \text{ ml} = 10^{-4} \text{ dm}^3$ a $1,8 \cdot 10^9 \text{ km}^3 = 1,8 \cdot 10^{21} \text{ dm}^3$. Keď máme správne premenené, môžeme vypočítať koncentráciu tak, ako v prvom prípade.

$$\frac{10^{-4}}{1,8 \cdot 10^{21}} \cdot 100\% = 5,56 \cdot 10^{-24}\%$$

Teraz to už len jednoducho porovnáme a vidíme, že mágov liečivý lektvar obsahuje viac % čarovnej esencie.

Bodovanie: Za správne vypočítanie pomeru pri babkinom lektvare 2 b a za vypočítanie podielu čarovnej esencie v ňom 0,5 b, za správne premenenie jednotiek pri mágovom lektvare 1 b za správne vypočítaný pomer 1 b a za výsledok v percentách 0,5 b.

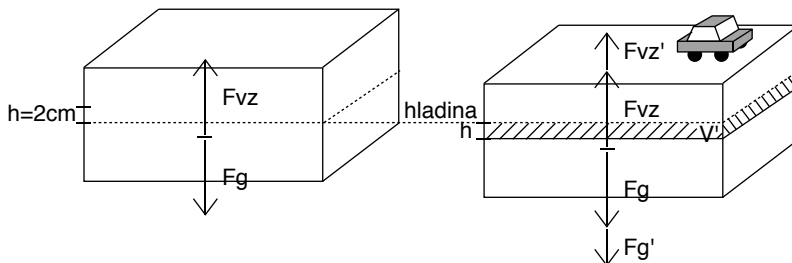
Príklad 2 - Kompa *opravoval Matej „Matt“ Duník*

Na takú bežnú kompu pohodenú vo vode pôsobia dve dôležité sily: gravitačná a vztlaková. Kompa si pokojne pláva vo vode (nesnaží sa ponárať ani vynárať) a teda výsledná sila je nulová. Vztlaková a gravitačná sila sú rovnako veľké.

$$F_{vz} = F_g$$

Na auto tiež pôsobí gravitačná sila (na obrázku označená $F'_g = mg$, kde m je hmotnosť auta) a keď ho postavíme na kompu, tak bude takou istou silou F'_g tlačiť na kompu smerom

dole. Čo sa stane keď nadol pôsobí väčšia sila ako smerom hore? Kopa sa začne ponárať. Ale žiadne strachy. Keď sa ponára, zväčšuje sa „objem ponorenej časti telesa“. Čím väčší objem pod hladinou, tým väčšia vztlaková sila. Kopa trochu klesne, trochu sa pohojdá a ustáli sa s ponorom väčším o 2 cm.



Ponorená časť kopy sa teda zväčší o uzúčky kváder s výškou $h = 2 \text{ cm}$ a plochou podstavy S (rovnaká ako plocha podstavy kopy).

$$V' = h \cdot S$$

Tento objem navyše zvýši vztlakovú silu o $F'_{vz} = V' \rho g = h S \rho g$. A na konci sa opäť vztlaková a gravitačná sila rovnajú:

$$\begin{aligned} F_{vz} + F'_{vz} &= F_g + F'_g \\ F'_{vz} &= F'_g \\ h S \rho g &= m g \\ S &= \frac{m}{h \rho} = \frac{1700 \text{ kg}}{0,02 \text{ m} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 85 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Tak to by sme mali obsah podstavy kopy. Pozrime na jej objem. Viacerí ste napísali, že to nevieme vypočítať. Niektorým chýbala výška kopy, niekomu by stačila hmotnosť alebo absolútny ponor, ďalší ste chceli hustotu a hrúbku železa. Čiže ste argumentovali spôsobom „keby som mal údaj xy, tak by som to vedel, ale ten údaj nemám“. Táto argumentácia žiaľ nie je správna, lebo to, že vám chýba práve výška ešte neznamená, že sa to nedá vypočítať nejakou inak.

Dám iný príklad: Som v Žiline a potrebujem sa dostať do Púchova (lebo bude začínať sústreďenie). Autom to trvá tak 40 minút, takže by som to stihol. Ale auto nemám, tak sa to nedá stihnúť. Tu by ste mali tú chybu ľahko zbadieť. Veď sú ešte iné možnosti. Napríklad vlakom sa to tiež dá stihnúť ak onedlho nejaký pôjde.

Späť ku kope. Pravda je taká, že objem sa naozaj nedá vypočítať, ale ako to dokázať? Napríklad môžeme pouvažovať, že kopa môže byť takmer ľubovoľne vysoká a na zvýšenie ponoru (čo je vlastne jediný údaj v zadaní) to nebude mať vplyv. Keby bola vysoká dva metre, ponorila by sa po naložení auta o 2 cm rovnako ako keby mala len meter a pol. Túto otázku som hodnotil veľmi mierne.

Bodovanie: Na 5 b bolo treba vypočítať a zdôvodniť, ale dokonalý dôkaz toho, že objem sa nedá spočítať, nebol potrebný. Ak vám chýbal postup, dostali ste len 3,5 b plusmínus 1 b za dobré postrehy alebo chyby.

Príklad 3 - Kôpky opravovala Barbora „Baša“ Hoffmannová

V tomto pokuse bolo treba zistiť z čoho sa dá vyrobiť najvyššia kôpka. Použili sme postupne soľ, cukor, múku, ryžu a zvolili sme si špeciálnu surovinu a tou bola káva. Tie sme sypali na podložku, ktorú sme si vyrobili a umiestnili sme ju tak, aby prebytočná surovina mohla padať z krajov preč. Keď začala látka padať mimo podložku, zastavili sme meranie a pomocou trojuholníkového pravítka sme odmerali výšku do akej sme nasypali kôpku. Pre všetky suroviny sme výsledok zapísali do tabuľky a určili sme tú, ktorá vytvorila najväčšiu kôpku. Pre naše meranie, sledujeme z tabuľky, že to bola múka.

suroviny	výška kôpky
Múka	2,3 cm
Ryža	2,2 cm
Soľ	2 cm
Cukor	1,9 cm
Káva	2,5 cm *

* najvyššia kôpka

Bodovanie: Za tabuľku 2 b, za 4 určené merania 1 b, za vymyslenú surovinu 1 b a za vyhodnotenie najväčšej kôpky 1 b.

Príklad 4 - Horúca téma opravoval Milan „Jimi“ Smolík

Najprv si odvážme svoju učebnicu, aby sme vedeli koľko paliva máme. Položíme ju na váhu: A ajhľa, 550 gramov. Týchto 550 gramov tvorí papier, obálka a atrament dohromady. Ak však predpokladám, že obálka je len ťažší papier a atrament neváži takmer nič, mám presne 550 gramov papiera.

Zo zadania sme sa dozvedeli, že každým gramom papiera vyprodukuje 18 kJ tepla. Tých gramov máme dohromady 550, teda aj tepla bude dohromady $18 \cdot 550 = 9900$ kJ. To ale pôjde nielen na ohrevanie, ale aj do okolia. Zadanie tvrdí, že na ohrev vody pôjde 70% tepla, teda spolu $9900 \cdot 0,7 = 6930$ kJ.

Teraz by sme sa mohli pozrieť na to, koľko vody týmto teplom dokážeme uvariť. Ľahko si spočítame, že teplotu potrebujem zvýšiť na bod varu o 100. Našťastie poznám vzorec, ktorý mi hovorí koľko tepla Q potrebujem na ohrev látky s hmotnosťou m a hmotnostnej mernej kapacity c o teplotu t , a to

$$Q = m \cdot c \cdot t$$

Tabuľky mi povedia, že hmotnostná tepelná kapacita vody je $4,18 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$, takže hurá dosadzovať! Vieme, že našim vypočítaným teplom máme ohriať nejakú hmotnosť vody o 100°C . Dosadíme do rovnice:

$$6930 \text{ kJ} = 4,18 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \cdot m \cdot 100^\circ\text{C}$$

Po úprave dostanem

$$m = 16,58 \text{ kg}$$

To je celkom veľa čaju. Najčastejšia chyba ktorú ste pri riešení robili, bola že ste si nedávali pozor na rozdiel medzi joulami a kilojoulami. Tiež ste sa občas strácali v tej rovnici a namiesto neznámej hmotnosti vody ste dosádzali hmotnosť knihy.

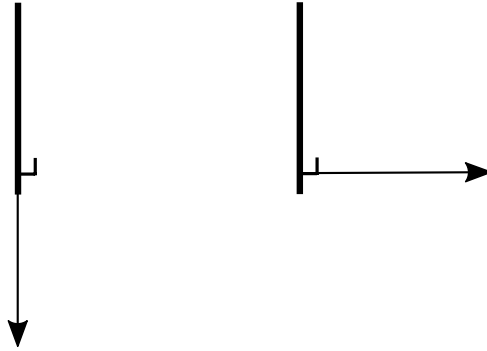
Bodovanie: *Za správne vypočítanie využitého tepla 2 b. Za správne zostavenie rovnice 1,5 b. Za správne dopočítanie rovnice 1,5 b. Za nesprávne narábanie s jednotkami alebo iné chyby som strhal 0,5 b až 1 b.*

Príklad 5 - Perpetuum mobile opravoval Maťo Gažo

Čaute. Pred začatím riešenia by sme si radi najskôr vysvetlili nejaké pojmy.

Elektrická sila, ktorá celý čas v úlohe vystupuje, pôsobí medzi každou dvojicou nábojov. Ak majú nejaké dva náboje rovnaké znamienka, budú sa odpudzovať, zatiaľ čo pri opačných znamienkach sa budú priťahovať. Dôležitou vlastnosťou je aj to, že síce veľkosť sily klesá so vzdialenosťou nábojov, neexistuje až tak veľká vzdialenosť, kedy by bola sila nulová. Inými slovami elektrická sila pôsobí naozaj medzi každými dvojicami, aj keby mali byť vzdialené niekoľko svetelných rokov.

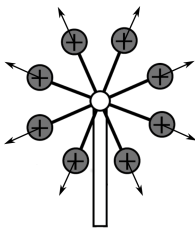
Moment sily je veličina, ktorá popisuje *otáčavý účinok sily*. Význam veličiny sa ukazuje pri nasledujúcej situácii. Predstavte si, že máte otvorené dvere. Keď ich chcete zavrieť, musíte na ne pôsobiť silou. Problémom je, že to, ako sa dvere budú otáčať nezávisí len od veľkosti sily, ktorou pôsobíte na kľučku, ale aj od jej smeru. Ak pôsobíte kolmo na dvere (ako zvyčajne) dvere sa budú otvárať najrýchlejšie. Moment sily bude vtedy najväčší. V prípade, že budeme pôsobiť v spojnici s dverami, bude jedno ako silno budeme tlačiť, dvere sa otáčať nezačnú. Vtedy bude moment sily nulový. Intuitívne, niekde medzi tým bude moment sily nenulový, ale nebude najvyšší.



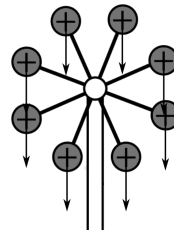
Obr. 1: Dvere (pohľad zhora). Vľavo je pôsobenie sily po spojnici, moment sily je nulový (dvere sa neotčia) a vpravo je smer sily kolmý na dvere, čím je moment sily maximálny a dvere sa takto otvárajú najľahšie.

Tak, a teraz sa, plne vyzbrojení teóriou, môžeme vrhnúť do riešenia. Najskôr si ukážeme, čo bude robiť koleso samo o sebe, bez základne. Na každú guľičku pôsobí tiažová sila a elektrická sila od ostatných guľičiek. Rýchly náčrt ukazuje, že elektrická sila protiľahlých guľičiek pôsobí po spojnici náboja a stred kolesa. To je v podstate to isté, ako keď sme sa snažili otvoriť dvere ťahaním po spojnici. Moment elektrických síl medzi týmito guľičkami navzájom bude teda nulový. Čo však sily medzi inými dvojicami guľičiek? Stačí si všimnúť, že ku každej sile medzi guľičkami nájdeme inú silu, ktorá bude pôsobiť presne opačným momentom. Tieto momenty sa tak vyrušia a koleso sa teda neotáča.

S tiažovou silou sa musíme popasovať inak, lebo vidíme, že vektory smerujú vždy pod inými uhlami. Záchranou nám však bude fakt, že na ľavú stranu kolesa, otáčajú do protismeru hodinových ručičiek bude pôsobiť určite rovnaký moment sily ako na pravú stranu (avšak otáčajú po smere hodinových ručičiek). Tieto dva momenty sa tak vyrovnajú a ani gravitačná sila koleso neroztočí.



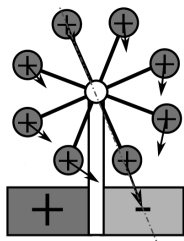
Obr. 2: Elektrická sila



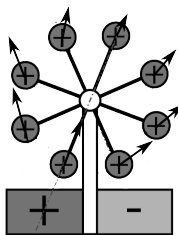
Obr. 3: Tiažová sila

Pridajme si aj pravú časť základne. Môžeme si všimnúť, že perpetuum mobile je symetrické vzhľadom na os prechádzajúcu stredom kolesa a kladne nabitou časťou základne. To ale znamená, že moment síl bude nulový, lebo presne polovica síl sa to bude snažiť roztáčať

časť v smere hodinových ručičiek a druhá polovica v protismere hodinových ručičiek. Pravá časť základne teda perpetuum mobile neroztočí. Analogicky potom aj ľavá časť bude mať sily tiež symetricky rozložené a celkový moment sily tak bude taktiež nulový. Preto sa perpetuum mobile neroztočí ani teraz.



Obr. 4: Pravá strana



Obr. 5: Ľavá strana

Bodovanie: Spravidla do jedného bodu sa dalo získať za výsledok, že koleso rotovať nebude (nemohlo to ale byť nevysvetlené). Zvyšné body sa rozdeľovali podľa správnosti vášho postupu.