Celoslovenský korešpondenčný seminár z fyziky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOFYZ

18. ročník www.pikofyz.sk šk. rok 2015/2016

Vzorové riešenia 3. série letnej časti

Príklad 1 - Zrušme prevody! *opravovala Dominika Iždinská - Domča*

Zrušiť, či nezrušiť? Nuž, poďme sa spolu pozrieť, ako je to s tými prevodmi. Pri pohľade na bicykel vidíme, že pedále otáčajú ozubeným kolesom, ktoré je reťazou prepojené na jedno z menších ozubených koliesok otáčajúcich zadným kolesom bicykla. Kolieska sú zoradené podľa veľkosti a každé z nich zodpovedá jednému stupňu prevodovky. Pozrime sa na zadnú prehadzovačku: prehodením na daný stupeň vlastne posunieme reťaz na príslušné koliesko, ktoré teraz cez naše otáčanie pedálov roztáča zadné koleso a umožňuje pohyb bicykla. Ak by sme mohli sledovať správanie sa reťaze počas našej jazdy na bicykli, videli by sme, že čím vyšší prevod na prehadzovačke zaradíme, tým menšie koliesko bude prepojené reťazou s našimi pedálmi, a tým sa nám pôjde ťažšie. Prečo je to tak?

Vezmime si najprv najmenšie koliesko zadnej prehadzovačky. Povedzme, že jeho obvod je 3-krát menší ako obvod hnacieho (pedálového) kolesa. Za jedno naše otočenie pedálov teda koliesko prepojené so zadným kolesom spraví až 3 otáčky. Teda v jednom našom otočení pedálov musíme vyvinúť 3-krát väčšiu silu, ako by sme vyvinuli, ak by boli obe kolesá rovnako veľké. Čím ľahší prevod zaradíme - teda čím väčšie koliesko máme - tým menšiu dráhu prejde koleso bicykla na jedno naše otočenie pedálov a tým sa nám ide ľahšie.

Tu už narážame na ďalšiu otázku zadania - na čo sú nám vlastne tie ťažké prevody dobré? Nebolo by ideálne jedno obrovské koleso? Nuž, zrejme tušíte, že tak ľahko to nepôjde. Predstavme si jedno ozubené koleso približne vo veľkosti samotného kolesa bicykla. Teraz by sa nám síce išlo naozaj jednoducho, no na jedno otočenie kolesa by sme museli spraviť niekoľko otáčok pedálov, takže by sme sa vedeli hýbať iba veľmi pomaly. Ťažšie prevody nám teda umožňujú ísť rýchlejšie, čo tiež nie je na škodu. Ak by sme si zaradili najľahší prevod na ceste dolu kopcom, ktorý nás už sám rozbieha, pedálmi by sa nám krútilo veľmi ľahko, ale aby sme išli rýchlejšie, museli by sme nohami krútiť extrémne rýchlo. Naopak, vyšší prevod pri rovnakej rýchlosti pedálovania dodáva bicyklu väčšiu rýchlosť, a tak prispieva k rýchlejšej ceste dolu. Pri ceste hore kopcom nám však pohyb bicykla spôsobuje väčšiu námahu a tak je pre nás výhodnejšie zaradiť si prevod, pri ktorom zvládneme točiť kolesom - pri príliš ťažkom prevode na prudkom kopci už nemusíme byť schopní pohnúť bicyklom vôbec.

Bodovanie: $2\ b$ *ste mohli získať za vysvetlenie, ako funguje prevodovka a prečo sa nám na ľahšom prevode ide ľahšie a naopak. Zvyšné* $3\ b$ *zase za objasnenie toho, ktorý prevod je načo dobrý a kedy ho použiť.*

Príklad 2 - Vypočítavý maco *opravovala Dominika Iždinská - Domča*

Na to, aby sa medveď vyštveral na strom, potrebuje vykonať určitú prácu. Prekonáva pri tom gravitačnú silu, ktorá naňho pôsobí a jeho vykonaná práca bude tým väčšia, čím vyššie sa pokúsi vyliezť. Ako vieme, pre prácu platí $W = F \cdot s$, v našom prípade $W = F \cdot s = m \cdot g \cdot s$, kde m je hmotnosť maca, g gravitačné zrýchlenie a s výška stromu. Po dosadení konkrétnych hodnôt dostávame:

$$W = F \cdot s = m \cdot g \cdot s = 170\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m} \cdot 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 17000\,\mathrm{J}$$

Toto je energia, ktorú maco vynaloží na svoj výstup. Nás však zaujíma energia, ktorú musí prijať z medu. Keďže na prácu vie premeniť iba 15% energie prijatej z jedla, med musí mať energiu

$$E_\mathrm{m} = \frac{17000\,\mathrm{J}}{0{,}15} = 113333{,}333\,\mathrm{J}$$

Tak, to by sme mali. Už len zistiť, koľko medu musí zjesť, aby prijal toto množstvo energie. Energetická hodnota medu je $E_\mathrm{h} = 1272\,\mathrm{kJ/100\ g}$, čo je po premenení na základné jednotky

$$E_\mathrm{h} = 12720000\,\mathrm{J}/1\,\mathrm{kg}$$

Toto číslo nám hovorí, koľko energie má $1\,\mathrm{kg}$ medu. Aby sme zistili, v koľkých kg medu je E_m energie, musíme podeliť E_m energetickou hodnotou, vďaka čomu dostávame:

$$\frac{E_\mathrm{m}}{E_\mathrm{h}} = \frac{113333{,}333\,\mathrm{J}}{12720000\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}} = 0{,}0089099\,\mathrm{kg}$$

Macovi sa teda oplatí štverať na strom len vtedy, ak je v úli aspoň $8{,}9099\,\mathrm{g}$ medu. Nie je to trochu málo? Na čo ďalšie, okrem lezenia, podľa teba medveď ešte míňa energiu?

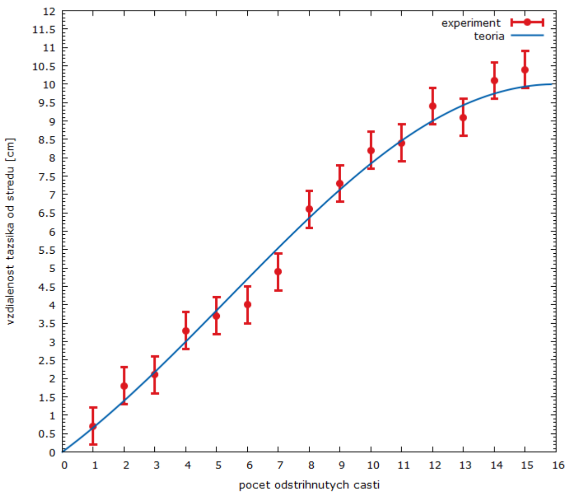
Bodovanie: *Za správny výsledok $1\ b$, za popis vášho postupu $1\ b$, za správny výpočet $3\ b$ - z toho za vyrátanie energie medveďa $1\ b$, za zistenie, koľko potrebuje energie od medu $1\ b$, za zistenie, koľko gramov musí mať med $1\ b$.*

Príklad 3 - 3,2,1...pizza *opravoval Ondrej Bogár - Bugý*

Ja mám strašne rád experimenty, takže sa do neho pustíme. Pizzu som si vyrobil z kartónu z veľkej krabice a mala polomer 15 cm. To je už celkom fajn kruh a bude sa s ním dobre merať. Pre ukážku som vo vzorovom riešení urobil experiment s 16 kúskami pizze.

Ako nájsť a zmerať ťažisko? Sú dve možnosti, ale jedna z nich je dosť nepresná. Ťažisko je bod, v ktorom keď podoprieme teleso, tak nespadne. Takže by sme si mohli zobrať napríklad ostrú ceruzku a hľadať bod, v ktorom keď položíme pizzu na hrot ceruzky, tak nespadne. Ak by sme to robili napríklad na prste tak je meranie dosť nepresné, lebo prst je široký. V každom prípade je takéto hľadanie ťažiska naozaj otrava a nemusí sa ani podariť.

Omnoho lepšie je využiť fakt, že keď zavesíme pizzu za jej okraj, tak ostane visieť tak, že ťažisko bude zvislo pod bodom zavesenia. Z bodu zavesenia si zvesíme šnúrku so závažím (ktorá pôjde isto kolmo dole) a nakreslíme si na pizzu podľa nitky čiaru. Niekde na tejto čiare je ťažisko. Potom zavesíme pizzu v inom bode a postup zopakujeme. Všetky takto nakreslené čiary na pizze sa musia pretnúť v ťažisku. Potom nám už stačí iba zmerať vzdialenosť od stredu.



V grafe sú nakreslené moje namerané hodnoty. Povedal som si, že celé to vešanie a kreslenie čiar robí nejakú nepresnosť v meraní polohy. Odhadol som ju, že je to $0{,}5$ cm. Preto som z mojich nameraných bodov ešte nakreslil chybové úsečky plus a mínus $0{,}5$ cm. No a niekde v rozsahu týchto úsečiek je aj reálna hodnota vzdialenosti ťažiska od stredu.

Experimentovanie s pizzou ma bavilo, tak som si povedal, že skúsim aj vypočítať, kde by sa ťažisko malo nachádzať. Moje vypočítané hodnoty sú v grafe nakreslené modrou čiarou. A vidím, že mnou namerané výsledky sú približne vždy okolo tejto čiary a prekrývajú sa s ňou aspoň chybovými úsečkami. Vidím, že pri odobratí 6. a 7. kúsku som meral dosť nepresne.

Čo je ale zaujímavé, tak keby mi na konci ostal len veľmi malý tenký kúsok pizze, tak poloha ťažiska by bola v $\frac{2}{3}$ polomeru. Pri poslednom veľmi malom kúsku môžeme zanedbať zaoblenie okraju pizze a je to naozaj rovnoramenný trojuholník. Na matematike sa predsa učí, že ťažisko rovnoramenného trojuholníka je tam, kde sa pretínajú ťažnice a to je v $\frac{2}{3}$ jeho výšky. A výška trojuholníka je skoro polomer pizze, takže v rámci presnosti meraní sú to $\frac{2}{3}$ polomeru

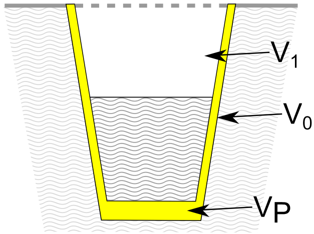
Bodovanie: $2{,}5$ *b za správny graf,* 1 *b za dostatočne presné meranie,* $1{,}5$ *b za popísanie, ako ste merali, a ako ste spravili pizzu.*

Príklad 4 - Poloplný pohár *opravoval Martin Lauko - Logik*

Čaute! Na úvod jednoduchá kvízová otázka: predstavme si drevený pohár vyrobený napríklad z čerešňového dreva (hustota $620\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$). Takýto prázdny pohár bude plávať na hladine vody v umývadle. Koľko vody do neho musíme naliať, aby sa potopil na dno? Premyslite si odpoveď, na záver sa k tomu vrátime.

Ako fyzici nebudeme riešiť, či je pohár poloplný alebo poloprázdny, ale akú má hustotu ϱ_P. Hustotou pohára rozumieme **hustotu materiálu**, z ktorého je pohár vyrobený. Táto hustota sa nemení, či je pohár na hladine alebo ponorený na dne umývadla. K jej výpočtu potrebujeme poznať hmotnosť pohára ($m_\mathrm{P} = 390\,\mathrm{g}$) a jeho objem ($V_\mathrm{P}$).

Objem pohára nepoznáme. Ak si však označíme vonkajší objem pohára V_0 a jeho vnútorný objem (teda koľko vody sa do neho zmestí) ako $V_1 = 0{,}5\,\ell$, rozdiel tvorí objem pohára $V_\mathsf{P} = V_0 - V_1$, ako na obrázku.



Zo zadania vieme, že prázdny pohár pláva na hladine, avšak keď do neho nalejeme $0{,}25\,\ell$ vody, potopí sa. V momente potopenia sa (resp. poslednú kvapku vody pred potopením) musia byť sily pôsobiace na pohár v rovnováhe. Teda vztlaková sila F_vz sa rovná gravitačnej sile F_g.

V našom prípade závisí vztlaková sila od objemu telesa - teda vonkajšieho objemu pohára V_0 a od hustoty vody $\varrho = 1000\,\frac{\mathsf{kg}}{\mathsf{m}^3}$. Gravitačná sila závisí od hmotnosti pohára m_P a hmotnosti $0{,}25\,\ell$ vody, ktorá je $m_\mathsf{V} = 0{,}00025\,\mathsf{m}^3 \cdot 1000\,\frac{\mathsf{kg}}{\mathsf{m}^3} = 0{,}25\,\mathsf{kg}$. Dajme ich do rovnosti

$$V_0 \cdot \varrho \cdot g = F_\mathsf{vz} = F_\mathsf{g} = (m_\mathsf{P} + m_\mathsf{V}) \cdot g$$

Po úprave dosadíme:

$$V_0 = \frac{(m_\mathsf{P} + m_\mathsf{V})}{\varrho} = \frac{0{,}39\,\mathsf{kg} + 0{,}25\,\mathsf{kg}}{1000\,\frac{\mathsf{kg}}{\mathsf{m}^3}} = 0{,}00064\,\mathsf{m}^3$$

Objem pohára dostaneme odpočítaním vnútorného objemu:

$$V_\mathsf{P} = V_0 - V_1 = 0{,}00064\,\mathsf{m}^3 - 0{,}0005\,\mathsf{m}^3 = 0{,}00014\,\mathsf{m}^3$$

Z hmotnosti a objemu už ľahko dopočítame hustotu pohára:

$$\varrho_\mathsf{P} = \frac{m_\mathsf{P}}{V_\mathsf{P}} = \frac{0{,}39\,\mathsf{kg}}{0{,}00014\,\mathsf{m}^3} \doteq 2785{,}71\,\frac{\mathsf{kg}}{\mathsf{m}^3}$$

Pohľadom do tabuliek zistíme, že pohár môže byť vyrobený zo skla ($2400 - 2800\,\frac{\mathsf{kg}}{\mathsf{m}^3}$), keramiky ($2000 - 3000\,\frac{\mathsf{kg}}{\mathsf{m}^3}$) alebo duralu ($2800\,\frac{\mathsf{kg}}{\mathsf{m}^3}$). Tým sme hotoví.

Aha, koľko vody treba naliať do dreveného pohára, aby sa potopil? Hocikoľko, drevený pohár bude predsa vždy plávať na hladine! Takže ani pohár po babičke nemôže byť vyrobený z dreva. Keby nám vyšlo, že áno, asi sme niekde urobili chybu.

Bodovanie: *Kompletné a správne riešenie* 5 *b, riešenie s drobnými chybami* 4 *b až* $4{,}7$ *b, s nedostatočným komentárom* $3 - 4$ *b, neúplné riešenie s dobrými myšlienkami* $1 - 2{,}5$ *b.*

Príklad 5 - Chlapík v metre *opravoval Ján Boogie Bogár*

Ahojte!

Väčšina z vás správne odhadla, akou silou ľudia tlačia, a tiež ste si uvedomili, že metro je vlastne páka s osou otáčania v mieste, kde sa ľavé koleso dotýka koľajnice. Pri výpočtoch ste sa ale mnohí pomýlili, a tak si ich dopodrobna rozoberieme.

Najprv musíme určiť, aké sily pôsobia na metro. Tieto sily sú tri: gravitačná sila, sila, ktorou tlačia ľudia, a reakcia od koľajníc. O každej z nich musíme vedieť jej veľkosť, smer a bod pôsobenia.

Gravitačná sila:
Pôsobí na metro v jeho ťažisku a má veľkosť $F_g = m_{metro} \cdot g$, kde $m_{metro} = 31\,\text{t}$ je hmotnosť metra. Presnú polohu ťažiska nevieme, ale keďže metro je symetrické, ťažisko bude niekde v jeho strede. Nachádza sa teda vo vodorovnej vzdialenosti $r_1 = 0{,}715\,\text{m}$ od osi otáčania. Výšku ťažiska nepoznáme, tak zatiaľ dúfajme, že ju nebudeme potrebovať, a pokračujme.

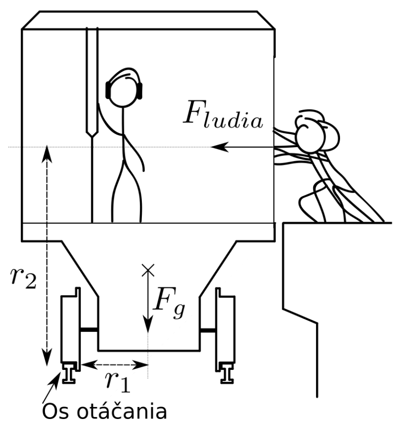
Sila, ktorou tlačia ľudia na metro:
Ľudia tlačia zhruba vo výške $1{,}5\,\text{m}$ nad podlahou metra, čo je dokopy $r_2 = 2{,}7\,\text{m}$ nad koľajnicami. Smer sily môžeme odhadnúť ako približne vodorovný. Veľkosť sily sa odhaduje ťažšie. Niektorí z vás nelenili a túto hodnotu veľmi kreatívne odmerali tak, že o stenu opreli váhu a zatlačili na ňu. Zistili tak, že človek vie tlačiť približne $3/5$ svojej hmotnosti. K podobnému výsledku sa dá dospieť aj úvahou. Sila, ktorou človek tlačí, je často obmedzená hlavne tým, že ak by tlačil silnejšie, pošmykli by sa mu nohy. Je teda obmedzená koeficientom trenia, ktorý je pre podrážky na asfalte približne $0{,}55$. Človek teda môže tlačiť približne len $0{,}55$ násobkom svojej hmotnosti, inak sa pošmykne. Budeme teda predpokladať, že ľudia tlačili na metro silou zodpovedajúcou polovici ich hmotnosti, teda:

$$F_{ludia} = \frac{1}{2} \cdot N \cdot m_{clovek} \cdot g$$

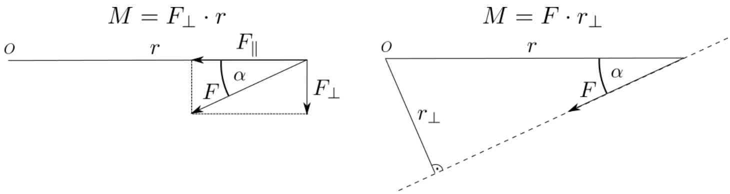
Kde N je počet ľudí a m_{clovek} je priemerná hmotnosť človeka, čiže približne $70\,\text{kg}$.

Reakcia od koľajníc:
Tá tlačí dohora v bodoch, kde sa kolesá dotýkajú koľajníc a má rovnakú veľkosť ako F_g. Tieto dve sily sa teda navzájom vyrušia a vďaka tomu sa metro neprepadne cez podlahu. Našťastie, táto sila nijako neovplyvní, či ľudia vedia metro nakloniť: ak by sa to totiž ľuďom podarilo, metro by stálo iba na ľavej kolajnici a celá reakčná sila by teda pôsobila tam. To je ale v osi otáčania, a tak by otáčanie metra nijako neovplyvnila.

Ľuďom sa podarí metro nakloniť vtedy, ak moment sily, ktorou tlačia, bude väčší ako moment sily, ktorým pôsobí gravitačná sila na metro. Moment sily vypočítame ako súčin sily a ramena sily (teda vzdialenosti pôsobiska sily od osi otáčania). Lenže je tu jeden dôležitý detail: **pri výpočte momentu sily hrá úlohu len zložka sily kolmá na rameno sily.** To sa dá pri výpočte obísť tak, že budeme síce brať celú silu, ale len "kolmé rameno". Na ďalších dvoch obrázkoch si vysvetlíme, čo to vôbec znamená. Na oboch je tá istá páka s ramenom r, na ktorú pôsobí sila F pod uhlom α. Na obrázku vľavo počítame moment sily tak, že silu rozložíme na jej zložku kolmú na rameno a zložku rovnobežnú s ramenom. Moment



sily potom bude $M = r \cdot F_\perp$. Napravo počítame tak, že silu necháme pôvodnú, ale budeme brať "kolmé rameno". To získame tak, že vektor sily predĺžime na priamku a z tejto priamky nakreslíme kolmicu k osi otáčania. Dĺžka tejto kolmice je hľadané kolmé rameno. Takže $M = r_\perp \cdot F$. To, že obidva spôsoby dajú rovnaký moment sily sa dá vidieť rovno z obrázka, treba pri tom použiť podobnosť trojuholníkov alebo goniometrické funkcie. Skúste si to niekedy premyslieť.



Keď už teda vieme, ako správne počítať momenty síl, pozrime sa znovu na metro. Kolmé ramená pre obidve sily nájdeme ľahko: sú to práve vodorovná vzdialenosť ťažiska od osi otáčania, teda r_1 a výška, v ktorej tlačia ľudia, teda r_2. Teraz už vieme rovno napísať podmienku pre to, aby ľudia metro naklonili:

$$M_g < M_{ludia}$$

$$F_g \cdot r_1 < F_{ludia} \cdot r_2$$

$$m_{metro} \cdot g \cdot r_1 < \frac{1}{2} \cdot N \cdot m_{clovek} \cdot g \cdot r_2$$

$$N > \frac{2 \cdot m_{metro} \cdot r_1}{m_{clovek} \cdot r_2}$$

$$N > \frac{2 \cdot 31000\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}715\,\mathrm{m}}{70\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}7m} \approx 234$$

Vyšlo nám teda, že by bolo treba viac ako 200 ľudí. To je na metro dlhé $19\,$m trochu moc - na jednom metri by muselo byť 12 ľudí. Vyšlo nám teda, že k metru sa nezmestí dosť ľudí na to, aby ho prevrátili, a video by teda malo byť falošné. Lenže, prekvapenie - tento incident sa naozaj stal a to v Perthe v Austrálii. Link na video je tu: `https://www.youtube.com/watch?v=YORxs9E2Ex0`. Ako je teda možné, že ľudia metro naklonili, napriek tomu, že nám vyšlo, že sa to nedá? Odpoveď je prostá: metro nie je nepružná krabica, ale stojí na odpružených kolesách. A ako pri každej pružine, aj pre odpruženie kolies stačí aj malá sila na to, aby sa ohla. Platí len, že čím väčšia sila, tým väčšie ohnutie. Ľudia by skutočne nedokázali metro nadvihnúť tak, aby stálo iba na ľavom kolese, ale nahnúť ho vďaka odpruženiu by dokázali. Aj keď to nebolo treba k riešeniu príkladu, tým z vás, ktorí sa nad tým zamysleli a prišli na to, gratulujem. Rovnako gratulujem aj všetkým, ktorí dospeli k správnemu výsledku, lebo tento príklad bol naozaj ťažký.

Bodovanie: *Uvedomenie si, že metro je páka a že sa musia rovnať momenty síl* $1\ b$*, správne určenie pôsobiacich síl* $2\ b$*, správne určenie ramien síl* $2\ b$*.*