Celoslovenský korešpondenčný seminár z fyziky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOFYZ

19. ročník www.pikofyz.sk šk. rok 2016/2017

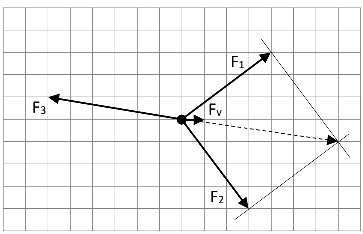
Vzorové riešenia 1. série zimnej časti

Úloha 1: Súboj o moc - *opravoval Patrik Drozdík*
Na plániku vidno, ako každý z troch synov ťahá korunu (v strede). Každá šípka ukazuje smerom, ktorým daný princ korunu ťahá a jej veľkosť zodpovedá jeho sile - každý štvorček na obrázku reprezentuje silu 100 N.
Ktorým smerom pôjde koruna a aká veľká výsledná sila na ňu bude pôsobiť?

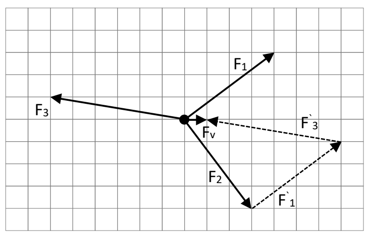
Väčšina z vás tento príklad riešila grafickým sčítavaním síl, takže tu opíšem najmä grafické spôsoby riešenia, no dalo sa to riešiť aj zistením si x-ovej a y-ovej časti sily a následným výpočtom. To je samozrejme tiež správne riešenie, takže ste zaň tiež mohli získať plný počet bodov. Grafické spôsoby sčítavania síl sú dva, no sú si vlastne dosť podobné:

1. spôsob - výslednica síl je uhlopriečkou rovnobežníka, ktorého strany ležia na skladaných silách:

Výslednicu dvoch síl jednoducho získame tak, že spravíme rovnobežku každého z oboch vektorov prechádzajúcu koncom druhého z vektorov. Priesečník týchto rovnobežiek spojíme s pôsobiskom síl, čím nám vznikne výsledný vektor (čiarkovaná šípka). Takto však vieme získať výslednicu iba dvoch síl, takže najprv sa vysporiadame s dvomi silami, a potom ich výslednicu zložíme s treťou. U niektorých z vás problém nastal, keď ste najskôr určili výslednicu síl 1 a 2. Táto výslednica síce vyzerá, akoby ležala na rovnakej priamke ako sila 3, no nie je to tak, a teda ich nemôžeme len tak odčítať, ale musíme si znova dokresliť rovnobežník a jeho uhlopriečka je celkovou výslednicou.



1. spôsob



2. spôsob

2. spôsob - presun začiatku vektora na koniec iného vektora:

Druhý spôsob, ktorým sa spoľahlivo vyhnete chybe popísanej na konci prvého spôsobu, spočíva v premiestnení šípky označujúcej vektor sily tak, aby začínala tam, kde nejaká iná končí. Na obrázku som najprv presunul F_1 na koniec F_2 (označená F_1`), a potom $F_3$ na koniec $F_1$`. Výsledná sila nám vznikne spojením pôsobiska s koncom poslednej presunutej sily.

Jedným, či druhým spôsobom vám malo vyjsť, že **výsledná sila má veľkosť 100 N a smeruje doprava**. Pri správnom grafickom nájdení tejto sily nebolo potrebné jej veľkosť počítať, stačilo si všimnúť, že leží práve na jednej strane štvorčeka, čo ako vieme zo zadania predstavuje 100 N.

Bodovanie: $3\ b$ *ste mohli získať za správny postup zisťovania výslednice síl.* $2\ b$ *za správny smer a veľkosť výslednej sily. Za nedostatočný postup, či menšie chyby som strhával do* $1\ b$.

Úloha 2: Desiate poschodie - *opravovala Dominika Iždinská - Domča*
Istotne si už počul, že slamkou nemožno vodu vytiahnuť do ľubovoľnej výšky, je to možné iba do výšky zhruba tretieho poschodia. **Prečo nie je možné slamkou vytiahnuť vodu až na desiate poschodie?**

Najprv si predstavme nádobu so slamkou v pokoji predtým než na ňu začneme akokoľvek pôsobiť. Na celú hladinu teraz pôsobí atmosférický tlak p_{a}. Keď začneme "ťahať", postupne vysávame vzduch v priestore nad hladinou ohraničenom slamkou, a tak znižujeme tlak, ktorý tu pôsobí. Na zvyšok hladiny však stále pôsobí tlak veľkosti p_{a}, a teda v slamke vzniká podtlak. Tlak pôsobiaci na zvyšok hladiny tlačí zdola na vodu v slamke, ktorá nad sebou nemá dostatočnú protiváhu, a tak stúpa slamkou hore. Po určitej dobe však vysajeme všetok vzduch, ktorý pôvodne tlačil na vodu v slamke. Vtedy bude atmosférický tlak pôsobiaci na zvyšok hladiny v rovnováhe s hydrostatickým tlakom vody v slamke a nad hladinou vznikne vákuum. Nech sa budeme akokoľvek snažiť ďalej ťahať, už tu nie je žiaden ďalší vzduch, ktorý by sme mohli odstrániť a tak prehĺbiť rozdiel tlakov. Voda už nemá prečo ďalej stúpať.

Mnohí z vás si overili odhad zo zadania aj výpočtom. Atmosférický tlak je približne 101325 Pa, hustota vody $1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ a gravitačné zrýchlenie $10\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$. Po vysatí všetkého vzduchu v slamke by sa mal atmosférický tlak pôsobiaci na zvyšok hladiny vyrovnať s hydrostatickým v slamke, teda

$$p_{\mathrm{a}} = p_{\mathrm{h}}$$

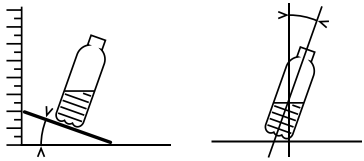
$$p_{\mathrm{a}} = h \cdot \rho$$

$$h = \frac{p_{\mathrm{a}}}{\rho} = \frac{101325\,\mathrm{Pa}}{1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} = 10{,}1325\ \mathrm{m}$$

Pri výške jedného poschodia približne 3 m vieme vodu naozaj dostať najviac do výšky 3. poschodia. V skutočnosti by táto výška bola ešte o niečo menšia, pretože voda by sa pri nižšom tlaku začala rýchlejšie vyparovať, dokonca vrieť. Toto ste však pri výpočte uvažovať nemuseli.

Bodovanie: $5\ b$ *ste mohli získať za úplné vysvetlenie princípu, výpočet nebol nutný.* $3\ b$ *za uvedomenie si, že vodu dvíha rozdiel tlakov v slamke a nad hladinou, zvyšné* $2\ b$ *za kvalitu popisu a vysvetlenia.*

Úloha 3: Fľašková - *opravoval Matej Duník*
Xavier a Mikuláš sa rozhodli, že si zahrajú bowling. Nemajú síce žiadne kolky, no majú kopu prázdnych PET fliaš. Keďže zhodiť prázdnu fľašu je jednoduché, chcú do každej fľaše naliať trochu vody, aby stála stabilnejšie. Pomôž im!
Experimentálne zisti, do akej výšky treba PET fľašu naplniť vodou, aby ju bolo možné vychýliť o najväčší uhol bez toho, aby sa prevrhla. Pokus nezabudni viackrát zopakovať.



Vybral som si PET fľašu s objemom $0{,}5\,\ell$. Chcem ju nakláňať tak, aby som vedel čo najpresnejšie merať uhol. Preto som sa rozhodol, že budem hýbať celou podložkou. Uhol, ktorý zviera podložka s rovinou stola sa dá zmerať veľmi presne. Vy ste väčšinou nakláňali samotnú fľašu, ale zato ste vymysleli rôzne spôsoby, ako merať presne, napríklad ste na fľašu prirobili paličku, ktorá ukazovala na presné miesto na stene, takže odčítať uhol bolo opäť presné. Na schéme sú teda znázornené moje meranie a najčastejšie vaše meranie.

Ako podložka mi poslúžila 40 cm dlhá doska na krájanie. Aby som nemusel používať uhlomer, naznačil som si na papier prilepený na stenu stupnicu. Takže samotné meranie potom bolo veľmi rýchle, stačilo dvíhať dosku až kým sa fľaša neprevrhne a potom prečítať číslo na stupnici. Takto som mohol spraviť stovku meraní celkom rýchlo.

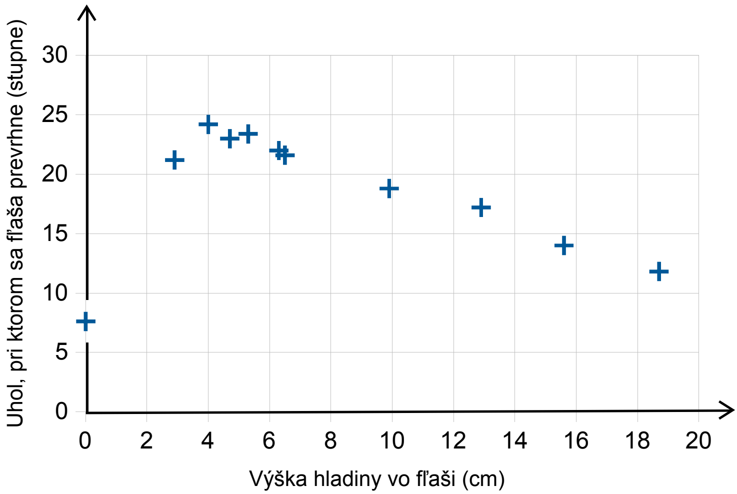
Tu sú namerané hodnoty:

Výška vody (cm)	Meranie 1.	2.	3.	4.	5.	Uhol (priemer) (stupne)
0	7	8	8	8	7	7.6
2.9	20	23	21	19	23	21.2
4.7	22	22	22	24	25	23
6.3	21	22	22	21	24	22
9.9	18	18	19	20	19	18.8
12.9	17	16	17	19	17	17.2
15.6	14	15	14	13	14	14
18.7	12	11	12	12	12	11.8

Je vidieť, že pri výške $4{,}7$ cm je uhol potrebný na prevrhnutie fľaše najväčší. Takže tu by som mohol prestať merať, ale rozhodol som sa ešte odmerať niekoľko výšok v okolí. Čo ak nájdem ešte lepšiu výšku? Takže tu sú ďalšie merania:

Výška vody (cm)	Meranie 1.	2.	3.	4.	5.	Uhol (priemer) (stupne)
6.5	22	21	22	22	21	21.6
5.3	23	23	25	23	23	23.4
4	23	24	24	25	25	24.2

A graf z nameraných hodnôt. V grafe sú len priemerné uhly:



V grafe vidno, že okolo výšky $4{,}7$ cm je nejaká nezrovnalosť. Hodnoty kolíšu a nie je jasné, kde je maximum. Nemá zmysel túto skutočnosť skrývať, takto som naozaj nameral.

Možných vysvetlení je niekoľko. Jedno je, že meranie nie je dostatočne presné a preto s mojou aparatúrou som schopný určiť, že najväčší uhol viem dosiahnuť niekde medzi 4 cm a $5{,}3$ cm. Alebo som meral nesprávne, napríklad, že som podložku dvíhal tak rýchlo, že vlna na vodnej hladine spôsobila prevrátenie fľaše skôr (alebo naopak, že fľaša ostala stáť aj pri väčšom uhle). Alebo fyzika tej fľaše je zložitejšia, ako som si myslel, a naozaj je tých najlepších výšok viac.

Najpravdepodobnejšie sa mi zdá, že môže byť problém v tom, že fľašu som mal vždy náhodne otočenú. Lebo má 5 „nôh“ a možno je rozdiel, či je položená tak, že na najnižšom mieste sú 2 nohy alebo naopak 1 noha. Túto teóriu som už ďalej neoveroval, môžete to vyskúšať, ak vás to zaujíma. Ale pre účely hrania koliek na tom nezáleží. Predpokladám, že chlapci pri stavaní fliaš nebudú dbať na ich otočenie.

Takže ideálna výška je teda okolo $4{,}5$ cm. Vysvetlenie sme od vás síce nežiadali, ale predsa len ho aspoň naznačím. Keď fľašu nakláňam, tak ju otáčam okolo osi - priamky, ktorá prechádza bodmi, v ktorých sa fľaša práve (počas toho náklonu) dotýka podložky. Táto os rozdeľuje rovinu podložky na dve polroviny. Podľa toho, nad ktorou polrovinou sa nachádza ťažisko, na tú stranu fľaša padne, keď ju pustím. Čiže aby som ju prevrhol, musím ju nakloniť tak veľmi, aby sa ťažisko dostalo nad druhú polrovinu. Čím je ťažisko nižšie, tým väčší uhol treba. Ak chcem, aby bola fľaša čo najstabilnejšia, treba zabezpečiť, aby spoločné ťažisko fľaše a vody bolo čo najnižšie. Keď je fľaša prázdna, tak je ťažisko približne v strede výšky. Keď je plná, tak je tiež v strede výšky. Ale keď do nej nalejem len trochu vody, ťažisko sa posunie nižšie. Z nameraných uhlov a rozmerov fľaše sa dá dokonca spočítať presne, v akej výške sa ťažisko nachádza.

Bodovanie: *Popis merania, dostatočný na to, aby som vedel vaše meranie aspoň zhruba zopakovať, som ohodnotil 2 b, ak ste mi ukázali namerané hodnoty v tabuľke alebo grafe, dostali ste ďalší 1 b. Za opakovanie merania pri rovnakých parametroch $0{,}5$ b. Za vyhodnotenie pokusu a zodpovedanie otázky v zadaní ste mohli získať zvyšných $1{,}5$ b*

Úloha 4: Lacná pracovná sila - *opravovali Martin Lauko - Logik a Matej Moško*
Na detskom ihrisku je drevená hojdačka. Je to drevená doska rozmerov 2 m x 20 cm x 5 cm. Robotníci sa však pri montáži pomýlili a jej os upevnili 20 cm od stredu. Všimli si to neskoro, no že sú to schopní fyzici podarilo sa im ju opraviť tak, že na koniec kratšej strany pripevnili kameň tak, ako vidno na obrázku. Kameň bol tvaru kvádra s rozmermi 20 cm x 20 cm x 4 cm.
Akú musel mať kameň hmotnosť, aby bola hojdačka vyvážená? Na jar ďalšieho roku prišla povodeň a zatopila ihrisko aj hojdačku s kameňom tak, že je celá pod vodou.
Je hojdačka aj pod vodou vyvážená, alebo padá na niektorú stranu? Na ktorú?
Drevo má hustotu 700 kg/m3.

Čo si myslíte, dá sa vyvážiť aj naša krivá hojdačka? Určite áno, pozrime sa na to, ako.

Naša hojdačka je vo fyzikálnom zmysle **páka**. Podmienkou rovnováhy na páke je rovnováha momentov síl ($M_1 = M_2$) na oboch stranách. Keďže ramená nie sú rovnako dlhé, nebude stačiť, aby boli ramená rovnako ťažké.

Aby sa nám dobre počítalo, dosku si v duchu rozdelíme na dve menšie dosky (kratšiu a dlhšiu). Použijeme konštanty: hustota dreva $\varrho = 700\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, gravitačná konštanta $g = 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$.

Ľavá strana

- dlhšia časť dosky: dĺžka $1{,}2$ m, objem $V_1 = 0{,}012\,\mathrm{m}^3$, hmotnosť $m_1 = V_1\varrho = 8{,}4$ kg, gravitačná sila $F_1 = m_1 g = 84$ N.

Pravá strana

- kratšia časť dosky: dĺžka $0{,}8$ m, objem $V_2 = 0{,}008\,\mathrm{m}^3$, hmotnosť $m_2 = 5{,}6$ kg, sila $F_2 = 56$ N,
- kameň: rozmery 20 x 20 x 4 cm, objem $V_3 = 0{,}0016\,\mathrm{m}^3$, hmotnosť označíme m_3.

Pri výpočte momentu sily potrebujeme poznať dĺžku ramena - teda vzdialenosť pôsobiska sily od osi otáčania. Keďže gravitačná sila pôsobí v ťažisku, ktoré je v strede dosky, ramená budú mať dĺžku $a_1 = 0{,}6$ m a $a_2 = 0{,}4$ m (používame základné jednotky). Komplikovanejšie je to s kameňom, keďže ten je upevnený na konci kratšej dosky - teda jeho vzdialenosť je 60 až 80 cm od osi otáčania, jeho ťažisko je v strede: $a_3 = 0{,}7$ m.

Momenty síl na ľavej M_1 a pravej M_2 strane sa musia rovnať ($M_1 = M_2$). Moment sily počítame ako sila krát rameno: $M = F \cdot a$, teda $M_1 = F_1 \cdot a_1$. Na pravej strane máme dve časti telesa (dosku a kameň), moment sily bude súčet momentov pre každé teleso:

$$M_2 = F_2 \cdot a_2 + F_3 \cdot a_3$$

Takže z rovnosti momentov síl postupne dostávame:

$$M_1 = M_2$$

$$F_1 \cdot a_1 = F_2 \cdot a_2 + F_3 \cdot a_3$$

$$m_1 \cdot g \cdot a_1 = m_2 \cdot g \cdot a_2 + m_3 \cdot g \cdot a_3$$

$$m_3 = \frac{m_1 \cdot a_1 - m_2 \cdot a_2}{a_3} = \frac{8{,}4 \cdot 0{,}6 - 5{,}6 \cdot 0{,}4}{0{,}7} = \frac{2{,}8}{0{,}7} = 4\,\text{kg}$$

Čo je náš výsledok - hľadaná hmotnosť kameňa m_3 je 4 kg.

A čo sa stane, keď hojdačku ponoríme pod vodu? Nestačí argumentovať hustotou (drevo pláva a kameň nie), musíme spočítať, aké momenty síl budú pôsobiť pod vodou na hojdačku ako pevne spojenú sústavu. Už z prvej časti vieme, že gravitačné sily sú vyvážené (hojdačka je v rovnováhe), pribudnú nám teda vztlakové sily. Ako vieme, vztlaková sila sa rovná tiaži kvapaliny telesom vytlačenej, teda závisí od objemu ponorenej časti telesa.

Ľavá strana hojdačky má objem $V_1 = 0{,}012\,\text{m}^3$, pravá strana $V_2 + V_3 = 0{,}008 + 0{,}0016 = 0{,}0096\,\text{m}^3$. Objem ľavej strany je väčší, vztlaková sila pôsobiaca na ňu bude teda väčšia a keďže pôsobí smerom nahor, nahor pôjde ľavá strana hojdačky (dlhšia doska). Pravá strana - kratšia doska s kameňom klesne nadol.

Bodovanie: *Prvá časť: 3 b za správny výpočet, $1-2$ b za čiastočne správny výpočet, ďalší 1 b za slovný komentár. Druhá časť: 1 b za správne zdôvodnenie. Za drobné chyby sme strhávali najviac 1 b.*

Úloha 5: Bolo nás jedenásť - *opravoval Peter Dupej - Peťo*

V rade stojí 11 odstavených železničných vagónov. Vagóny merajú 10 m a medzi každými dvomi je $0{,}5$ m medzera. Zozadu do nich narazí dvanásty vagón rýchlosťou $20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Vagón pri náraze odovzdá vagónu pred ním 80% svojej rýchlosti. Takto prebiehajú aj všetky ostatné zrážky.

Za aký čas od prvého nárazu sa pohne posledný vagón? Čo ak bude vagónov 47?

Neboj sa pri výpočte použiť počítač a vhodný softvér, napríklad Excel.

Najprv si treba uvedomiť, že v rade 11 vagónov je medzi vagónmi iba 10 medzier. Ak do týchto 11 vagónov vrazím dvanástym z jednej alebo z druhej strany, vždy bude musieť 10 vagónov prejsť 10 medzier, až kým predposledný vrazí do posledného. Preto je jedno, ako si vagóny očíslujeme. Ja si ich očíslujem odzadu dopredu číslami 0 až 11 tak, že najprv vrazí vagón s číslom 0 do vagónu s číslom 1 a potom do seba postupne narážajú vagóny 1 až 11. Aby sme zistili čas od prvej zrážky po poslednú, potrebujeme vyrátať časy, ktoré vagóny 1 až 10 potrebujú na prejdenie medzery k ďalšiemu vagónu, a potom všetky tieto časy zrátať. Pre prípad so 47 vagónmi budeme potrebovať zrátať 46 časov a pre N vagónov by to bolo $N - 1$ časov.

Všetky medzery medzi vagónmi sú rovnako veľké a túto vzdialenosť si môžeme označiť $d = 0{,}5$ m. Môžeme predpokladať, že sa celý vagón vždy hneď po náraze začne hýbať naraz. Preto je jedno, aké dlhé sú vagóny. Čas t, za ktorý vagón prejde vzdialenosť d, vyrátame ako $t = \frac{d}{v}$, kde v je rýchlosť, ktorou sa vagón pohybuje. Rýchlosť počiatočného vagónu je $v_0 = 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a každou zrážkou sa rýchlosť nasledujúceho vagónu zmenší na 80% toho predošlého, čo sa dá zapísať aj takto:

$$v_{i+1} = 0{,}8 \cdot v_i$$

Tento proces sa nazýva rekurzia, pretože opakovaním toho istého výpočtu vieme vždy z predošlého výsledku vyrátať nasledujúci. Napríklad z v_0 vypočítame v_1, z v_1 v_2 a tak ďalej. Opakujúce sa výpočty sú ale nudné a ľudia sú od prírody leniví. Preto sme vymysleli počítače. Napríklad ak si v programe Excel dám do bunky B2 hodnotu v_0 v $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, do bunky C2 napíšem =0.8*B2 a potom potiahnem za pravý dolný roh bunky C2 doprava až po stĺpec L, vyrátam si rýchlosti v_1 až v_{10}.

Keďže nemôžeme deliť vzdialenosť v metroch rýchlosťou v kilometroch za hodinu, musíme si najprv premeniť $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ na $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ nasledovným spôsobom:

$$1\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1\,\text{km}}{1\,\text{h}} = \frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = \frac{1}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

V Exceli toto vyrátame tak, že si pod B2 do bunky B3 napíšeme =B2/3.6 a znovu skopírujeme vzorec potiahnutím za roh až po stĺpec L.

Teraz potrebujeme vyrátať časy, za ktoré prejdú vagóny 1 až 10 medzeru k ďalšiemu vagónu. Každý vagón sa pohybuje inou rýchlosťou, takže potrebujeme vyrátať veľa rôznych časov pomocou vzorca $t_i = d/v_i$. V Exceli si do bunky C4 napíšeme =0.5/C3 a znovu potiahneme vzorec za roh doprava po stĺpec L. Ostáva nám už len spočítať časy t_1 až t_{10}. Do bunky B5 napíšeme =SUMA(C4:L4) (ak máte anglickú verziu Excelu, tak =SUM(C4:L4)). V bunke B5 dostaneme výsledok $3{,}74$, čo znamená, že od prvej zrážky po poslednú ubehlo $3{,}74$ s.

Pre 47 vagónov postupujeme rovnako, ale keďže potrebujeme sčítať časy t_1 až t_{46}, potiahneme všetky vzorce až po stĺpec AV a do bunky B6 napíšeme =SUMA(C4:AV4). V bunke B5 dostaneme výsledok 12914, čo znamená, že od prvej zrážky po zrážku 46. vagónu s 47. vagónom ubehlo 12914 s, čo je približne 3 hodiny a 33 minút.

Výsledná tabuľka v Exceli by potom pre prvých 11 vagónov mohla vyzerať nejako takto:

Číslo vagónu i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rýchlosť v_i ($\frac{\text{km}}{\text{h}}$)	20	16	12.8	10.24	8.19	6.55	5.24	4.19	3.36	2.68	2.15
Rýchlosť v_i ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$)	5.56	4.44	3.56	2.84	2.28	1.82	1.46	1.17	0.932	0.746	0.597
Čas pohybu t_i (s)	-	0.112	0.141	0.176	0.220	0.275	0.343	0.429	0.536	0.671	0.838
Súčet t_1 až t_{10} (s)	3.74										
Súčet t_1 až t_{46} (s)	12914										

Či už ste to rátali ručne, použili Excel alebo si napísali program v niektorom z programovacích jazykov, všetky postupy, ktorými ste sa dopracovali k správnym výsledkom, boli rovnocenné. Akurát verím, že rátať ručne 46 čísel musela byť naozaj otrava.

Bodovanie: $5\ b$ *som pridelil za správne vyrátané časy pre oba prípady aj s popisom postupu.* $1\ b$ *som strhol za chýbajúci výsledok pre 47 vagónov,* $1\ b$ *za nesprávny počet medzier,* $1\ b$ *za nesprávnu veľkosť medzier,* $1\ b$ *za nepremenené jednotky a* $1\ b$ *za nesprávne vyrátané rýchlosti.*