



Vzorové riešenia 2. série letnej časti

Úloha 1: Čo najrýchlejšie! - opravovala Tereza Prokopová

Pri práci s ceruzkou, či už pri kreslení alebo matematike, ste si už istotne uvedomili užitočnosť gummy. **Ako funguje guma na gumovanie ceruzky? Ako to, že pomalým šúchaním sa gumuje horšie, než rýchlym? Prečo guma nefunguje na pero?**

Pozrime sa najprv, z akého materiálu sú zložené veci, ktoré používame, teda guma, ceruzka a papier. Ak sa lepšie prizrieme, zistíme, že povrch papiera nie je ani zďaleka hladký, ale naopak, je veľmi hrboľatý. Papier sú vlastne veľmi malé vybielené kúsočky dreva zlisované dokopy. V ceruzke sa nachádza tuha alebo grafit. Je to jedna z foriem uhlíka a môžeme ňou písať práve preto, lebo chemické väzby v tuhe umožňujú, aby sa čiastočky ľahko odštiepali a zachytávali sa medzi vláknami papiera. Guma je vyrobená z lepkavého materiálu a tiež je pružná, čo jej umožňuje dostať sa medzi jednotlivé vlákna papiera.

Keď prechádzame gumou po papieri, tá vďaka tomu, že je lepkavá berie so sebou aj čiastočky tuhy zachytené na papieri a aj vrchné vlákna papiera (preto ste možno už niekedy vygumovali diery). Keďže papier nie je hladký, pôsobí na gumu ako strúhadlo a obrusuje jej malé kúsky. Tie sa dostanú hlbšie medzi vlákna a zoberú so sebou aj čiastočky tuhy, ktoré sa prichytili takto hlboko. Obrúsené kúsky potom ako malé žmolky musíme oprášiť z papiera.

Trením gummy o papier vzniká teplo, ktoré robí gumu lepkavejšou. Keď šúchame rýchlo, vznikne väčšie teplo a guma bude lepkavejšia, preto sa na ňu nalepí viac čiastočiek tuhy.

Guma na pero nefunguje práve preto, lebo pero nefunguje ako ceruzka. Pero na papier vypúšťa atrament, ktorý sa vpije hlbšie do papiera. Pero teda nezanecháva žiadne čiastočky, ktoré by guma vedela so sebou zobrať.

Existuje však aj pero, ktoré ide vygumovať. Jeho atrament je vyrobený tak, že na teple mizne (priesvitnie) a v chlade sa opäť objaví. Na konci týchto pier zvykne byť guma, ktorá je však z tuhšieho materiálu ako tá na ceruzky, pretože jej úlohou je vytvoriť teplo a nie zbierať čiastočky. Trením tejto gummy o papier vzniká teplo, ktoré zohreje atrament tak, že zmizne. Skúste vygumovaný text dať do mrazničky a uvidíte, že sa znova objaví.

Bodovanie: Za vysvetlenie ako guma gumuje 2,5 b, za zdôvodnenie prečo rýchlejšie gumovanie pomáha 1,5 b a nakoniec prečo pero nevygumujeme 1 b.

Úloha 2: Užitočnosť klincov - opravovala Dominika Iždinská

Bola raz jedna polica tvorená doskou s dĺžkou 1 m a hmotnosťou 2 kg. Podopretá bola dvomi paličkami, no nebola k nim nijak pripevnená. Každá z nich bola 25 cm od okraja police. Paťo na paličku položil svoje ťažké učebnice s celkovou hmotnosťou 5 kg tak, že ich spoločné ťažisko bolo 10 cm od okraja police. V tom si však všimol, že palička nie je k paličkám úplne pripevnená a začala sa nakláňať, ba priam padať. Preto sa Paťo rozhodol, že ju vyváži inými ťažkými knihami, ktoré položí tak, aby ich ťažisko bolo 10 cm od druhého okraja police. **Akú môžu mať knihy minimálnu a akú maximálnu hmotnosť, aby sa palička neprevážila?**

Polička bez záťaže nemá dôvod nakláňať sa ani na jednu stranu, keďže momenty síl sú v rovnováhe. Ak však niektorú zo strán zaťažíme, doteraz pokojná palička sa začne správať ako páka s osou otáčania v paličke, ktorá je bližšie k miestu zaťaženia. V našom prípade Paťo zaťažil ľavú stranu knihami a spôsobil, že momenty síl pôsobiace na ľavú stranu sú väčšie ako tie pôsobiace napravo.

Na ľavú stranu pôsobí časť paličky, ktorá je naľavo od osi - teda časť s dĺžkou 25 cm = 0,25 m. Keďže hmotnosť celej paličky je 2 kg, hmotnosť tejto časti jednoducho vypočítame ako $0,25 \text{ m} \cdot 2 \text{ kg} = 0,5 \text{ kg}$ a sila, ktorou pôsobí, je teda $F_{11} = 0,5 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 5 \text{ N}$. Keďže gravitačná sila pôsobí v ťažisku, rameno sily bude mať v tomto prípade dĺžku $0,25 \text{ m} : 2 = 0,125 \text{ m}$. Druhá vec pôsobiaca naľavo sú knihy s hmotnosťou 5 kg, teda pôsobiace silou $F_{12} = 5 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ na ramene dĺžky $15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}$, čo je vzdialenosť kníh od osi otáčania.

Na druhej strane pôsobí hmotnosť zvyšku paličky, teda $0,75 \text{ m} \cdot 2 \text{ kg} = 1,5 \text{ kg}$ silou $F_{21} = 1,5 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 15 \text{ N}$ na ramene dĺžky $0,75 \text{ m} : 2 = 0,375 \text{ m}$. To, čo nás zaujíma je sila F_{22} , teda sila, ktorou musia pôsobiť knihy na pravej strane, aby sa palička neprevrhla. To nastane, keď budú momenty na pravej a ľavej strane v rovnováhe. Zo zadania vieme, že Paťo knihy položí 10 cm od druhého okraja, teda 65 cm od našej osi otáčania. Teraz môžeme tieto úvahy spojiť a zostaviť si rovnicu, v ktorej jediná neznáma je hmotnosť kníh na pravej strane:

$$M_{11} + M_{12} = M_{21} + M_{22}$$

$$F_{11} \cdot a_{11} + F_{12} \cdot a_{12} = F_{21} \cdot a_{21} + F_{22} \cdot a_{22}$$

$$5 \text{ N} \cdot 0,125 \text{ m} + 50 \text{ N} \cdot 0,15 \text{ m} = 15 \text{ N} \cdot 0,375 \text{ m} + X \cdot 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 0,65 \text{ m}$$

$$8,125 \text{ Nm} = 5,625 \text{ Nm} + 6,5 \frac{\text{Nm}}{\text{kg}} \cdot X$$

$$2,5 \text{ Nm} = 6,5 \frac{\text{Nm}}{\text{kg}} \cdot X$$

$$X = 0,38461 \text{ kg}$$

Minimálna hmotnosť, akú môžu mať knihy na pravej strane, ak nechceme, aby sa palička prevážila, je teda 0,38461 kg.

Keď uvažujeme o maximálnej hmotnosti kníh na pravej strane, musíme sa pozrieť na druhú páku - teda tú, ktorá má os otáčania v pravej paličke. Problém totiž nastane práve

vtedy, keď bude moment sily napravo od nej väčší ako ten naľavo a teda sa celá palička prevráti na pravú stranu. Podobnú úvahou ako predtým zostrojíme rovnicu, v ktorej bude našou neznámou hmotnosť kníh. Tentokrát však bude ľavá strana paličky pôsobiť silou $F_{11} = 0,75 \text{ m} \cdot 2$

$\cdot 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 15 \text{ N}$ na ramene dĺžky $0,75 \text{ m} : 2 = 0,375 \text{ m}$ (lebo ľavá časť paličky je teraz tá naľavo od druhej paličky) a knihy naľavo budú pôsobiť na ramene dĺžky $0,65 \text{ m}$. Napravo máme $F_{21} = 0,25 \text{ m} \cdot 2 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 5 \text{ N}$ na ramene dĺžky $0,125 \text{ m}$ a neznámu silu pôsobiacu na knihy na ramene dĺžky $0,15 \text{ m}$. Hmotnosť dopočítame ako Y :

$$M_{11} + M_{12} = M_{21} + M_{22}$$

$$F_{11} \cdot a_{11} + F_{12} \cdot a_{12} = F_{21} \cdot a_{21} + F_{22} \cdot a_{22}$$

$$15 \text{ N} \cdot 0,375 \text{ m} + 50 \text{ N} \cdot 0,65 \text{ m} = 5 \text{ N} \cdot 0,125 \text{ m} + Y \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 0,15 \text{ m}$$

$$38,125 \text{ Nm} = 6,25 \text{ Nm} + 1,5 \text{ kg}$$

$$37,5 \text{ Nm} = 1,5 \text{ kg}$$

$$Y = 25 \text{ kg}$$

Maximálna hmotnosť, akú môžu mať knihy na pravej strane, ak nechceme, aby sa palička prevrátila, je teda 25 kg .

Bodovanie: Za správne použitie momentov síl 1 b. Za správne určenie hmotností 1 b. Za správne určenie ramien 2 b. Nakonec za dobrý výsledok 1 b

Úloha 3: Zápalková - opravovali Tomáš Švihorík & Samuel Kočiščák

Kubo si jedného dňa chcel zapáliť sviečku. Keď však otvoril zápalkovú škatuľku, zistil, že každá zápalka má inú dĺžku. Pokúšal sa nimi sviečku zapáliť, no vadilo mu, že každá zhorí za iný čas. Pomôž Kubovi zistiť, ako dlho bude ktorá zápalka horieť. **Vyrob si (nakrájaj) zápalky rôznych dĺžok, sprav meranie a zostroj graf závislosti času potrebného na zhorenie celej zápalky v závislosti od jej dĺžky.** Pracuj opatrne, na bezpečnom mieste a pod dohľadom rodičov.

Naše meranie prebiehalo v uzavretej miestnosti, aby prúdenie vzduchu čo najmenej ovplyvňovalo výsledky merania (čas horenia zápalky). Keďže zápalka na horenie potrebuje dostatok vzduchu (kyslíku), nemali by sme držať zápalku v kombinačkách, alebo v prstoch, lebo na mieste, kde sa vec, ktorou zápalku držíme, dotýka povrchu zápalky, dôjde k obmedzeniu prístupu kyslíku, čím sa horenie značne spomalí, alebo úplne zastaví. Koniec zápalky sme preto napichli a špendlík (ktorý sme držali medzi prstami), ktorý drží zápalku vďaka treniu vo vnútri zápalky a nie na jej povrchu, ako je to v prípade kombinačiek. Nie je tiež jedno, v akej polohe držíme zápalku počas jej horenia. Ak bude totižto zápalka otočená hlavičkou hore, je veľmi pravdepodobné, že nedohorí až do konca. Ak bude otočená hlavičkou dole, začne takmer okamžite horieť celý povrch zápalky a čas horenia len ukáže, za aký čas prehorenie zápalky od povrchu k jej stredu. Najužitočnejšie hodnoty teda nameriame,

ak budeme zápalku počas horenia držať vodorovne. Zápalky sú štandardne napustené olejom alebo voskom, aby horeli dlhšie a nezhasínali. Napríklad naše zápalky boli napustené voskom, ale len do polovice, preto závislosť času horenia na dĺžke nebude úplne lineárna - koniec zápalky viac vzdialený od hlavičky horí pomalšie, ako koniec pri hlavičke, pretože pri hlavičke musí zhorieť aj vosk. Samotná hlavička taktiež ovplyvňuje meranie - síra horí pri vysokej teplote, no taktiež pridáva materiál, ktorý musí zhorieť. Výsledná závislosť sa bude teda podobať lineárnej, no úplne lineárna pravdepodobne nebude a bude do veľkej miery závisieť na konkrétnom type zápalky. Síra na hlavičke zápalky nám navyše zvyšuje presnosť merania času, lebo jasne vidieť, kedy sa síra chytila horieť a teda si nemôžeme pomýliť oheň rozhorievajúcej sa zápalky, s ohňom sviečky, ktorou zápalku zapalujeme. Budeme teda zápalky páliť od hlavičky.

Postup: Zápalku napichnutú na špendlík držíme vo vodorovnej polohe a s nachystanými stopkami priložíme hlavičku zápalky (časť so sírou) nad sviečku. Len čo spozorujeme, že sa síra na zápalku chytila (začala horieť), spustíme stopky, odtiahneme zápalku sponad plameňa sviečky a čakáme, až kým zápalka úplne nezhorí. Keď už nikde na zápalku nevidíme žiadny plameň a zároveň vidíme, že zápalka dohorela celá (nemá nezhočené miesto), tak zastavíme stopky. Ak zápalka nezhořela celá, tak meranie nezapišeme a meriame znova. Takto namerané časy horenia rôzne dlhých (vopred narezaných) zápaliek zapíšeme do tabuľky (tabuľka 1). Okrem toho je v tabuľke aj priemerný čas horenia pre každú dĺžku a smerodajná odchýlka tohto tohto priemeru, k tej sa ešte vrátíme.

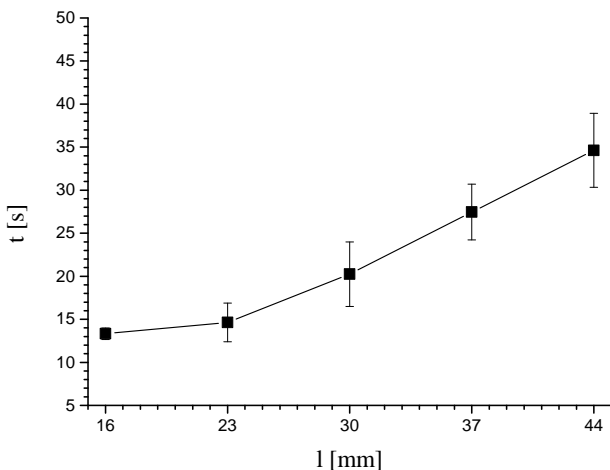
Tabuľka 1: Namerané časy horenia zápalky

dĺžka [mm]	čas horenia [s]					priemer	odchýlka [s]
	meranie číslo						
	1	2	3	4	5		
44	33,7	29,3	41,5	37,1	31,5	34,6	6,1
37	22,6	30,2	26,4	31,8	26,3	27,5	4,6
30	15,2	21,5	23,3	24,7	16,5	20,2	4,8
23	16,6	12,3	16,3	11,5	16,5	14,6	2,6
16	13,7	12	13,6	13,6	13,7	13,3	0,9

Merať čas horenia zápaliek na viac ako jedno desatinné miesto nemá veľký význam, lebo chyby meraní (reakčný čas človeka do 0,5 s) a rozptyl nameraných časov skresľujú namerané hodnoty výraznejšie ako na jedno desatinné miesto. Z aritmetických priemerov v tabuľke, vypočítaných z nameraných hodnôt v tabuľke si zostrojíme graf závislosti času potrebného na zhorenie celej zápalky, od jej dĺžky.

Z grafu, podľa očakávania, vidíme, že s rastúcou dĺžkou zápalky rastie aj čas jej úplného zhorenia.

Presnosť určenia jednotlivých časov horenia možno odhadnúť napríklad ako polovicu rozdielu najvyššej a najnižšej nameranej hodnoty pre každú dĺžku. Tá je zapísaná v tabuľke 1 a je znázornená pomocou tzv. chybových úsečiek v grafe na obrázku 1. Sú to úsečky vyčádzajúce z nameraného bodu závislosti, ktoré vyčnievajú nad aj pod daný bod do vzdialenosti zodpovedajúcej veľkosti odchýlky.



Obr. 1: Graf závislosti času horenia zápalky od jej dĺžky

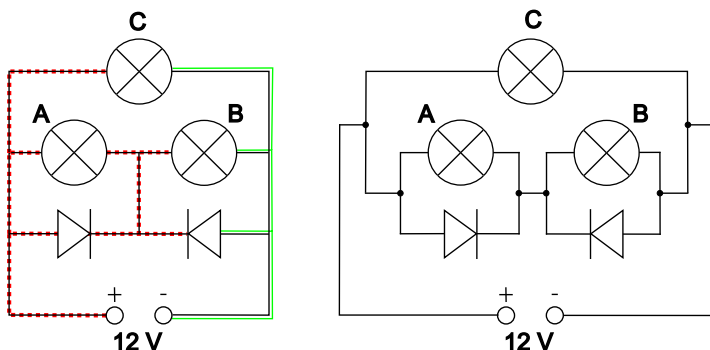
Vidno, že odchýlka (polovica vzdialenosti najväčšej a najmenšej nameranej hodnoty) je pomerne veľká, z čoho je jasné, že aby sme našli skutočnú presnú priemernú hodnotu, je potrebné urobiť veľa meraní. Inak hodnoty v grafe silno pripomínajú lineárnu závislosť, až na to, že začiatok zápalky (pri hlavičke) horí o niečo pomalšie ako koniec, pravdepodobne kvôli vosku v dreve.

Bodovanie: Za popisanie podmienok merania 0,5 b, za popis postupu merania 1 b, za korektné nameranie dostatočného množstva dát 1 b a za korektné spracovanie nameraných hodnôt (napríklad do tabuľky) a graf ďalšie 2 b. Za diskusiu a záver o presnosti merania a skúmanej závislosti 0,5 b.

Úloha 4: Jednosmerka - opravoval Patrik Drozdík, vzorák napísal Martin Lauko - Logik
 Mariannka si rada zapája elektrické obvody. V jej obľúbenom elektrickom obvode sa nachádza 12 V batéria a tri 12 V žiarovky. Nedávno sa rozhodla, že do obvodu pridá dve diódy tak, ako je nakreslené na obrázku vľavo. Teraz rozmýšľa nad tým, ktoré zo žiaroviek budú svietiť. Viete Mariannke poradiť? **Ako silno budú svietiť jednotlivé žiarovky (v porovnaní so žiarovkou priamo napojenou na batériu)?**

Ahoj, ahoj! Dnes sa naučíme niečo nové o vedení elektrického prúdu v jednoduchom obvode. Najskôr musíme vyriešiť diódy - ako vieme zo zadania, ak ide prúd **správnym smerom** (\oplus prichádza v smere šípky, ako na prostrednej schéme v zadaní), dióda vedie elektrický prúd a môžeme ju nahradiť vodičom s nulovým odporom. V opačnom smere dióda prúd neprepúšťa a tak ju môžeme nahradiť prerušením vodiča.

Ukážeme si dva spôsoby, ktorými sa dala úloha vyriešiť.



Obr. 2: Vľavo: Metóda potenciálov. Vpravo: Prekreslenie schémy.

(1) Metóda potenciálov. V obvode si vyznačíme vodiče, ktoré sú vodičmi priamo spojené s kladným pólom batérie. Tieto majú rovnaké napätie 12 V (správne by sme povedali rovnaký potenciál). Na obrázku vľavo sme ich vyznačili červenou bodkovanou čiarou (ak to nie je dobre vidieť, pozri si PDF na www.pikofyz.sk). Keďže k dióde pod žiarovkou A prichádza prúd v smere šípky, dióda sa správa ako vodič a tak sme červenou označili aj vodiče za touto diódou.

Podobne vyznačíme zelenou tenkou čiarou vodiče, ktoré sú spojené so záporným pólom batérie. Všimnime si, že pravá dióda má kladný pól batérie zapojený zľava a záporný sprava, v tomto smere cez ňu prúd nepotečie. Úsek s diódou pod žiarovkou B teda môžeme vynechať. Platí, že vodiče vyznačené rovnakou farbou majú rovnaký potenciál.

Aby žiarovka svietila, musí byť spojená s kladným aj záporným pólom batérie, tie majú rozdielny potenciál - napätie. Pre žiarovky B aj C to platí, svietiť teda budú. Žiarovka A je však z oboch strán pripojená na kladný pól batérie, svietiť teda nebude. Súvisí to s tým, že elektrický prúd si radšej vyberie cestu cez diódu s nulovým odporom pod žiarovkou A.

(2) Prekreslenie schémy. Elektrické obvody môžeme ľubovoľne prekresľovať, ak dodržíme jednoduché pravidlo - vodiče môžeme otáčať, zahýbať, predlžovať, skracovať, avšak nemôžeme ich zapojiť alebo rozpojiť. To sme urobili s našou schémou na obrázku vpravo.

Všimnime si najskôr diódu a žiarovku A zapojené paralelne. Keďže prúd prechádza zľava doprava, dióda má nulový odpor a tak prúd prechádza cez ňu. Žiarovka A nebude svietiť. Opačná situácia je v prípade žiarovky B zapojenej paralelne s nepriepustnou diódou. V tomto prípade prúd nepôjde prúd cez diódu, ale iba cez žiarovku B.

Celú schému teda môžeme prekresliť a zjednodušiť na dve paralelné vetvy: horná so žiarovkou C a dolná so žiarovkou B. Keďže obe žiarovky sú rovnakého typu a sú zapojené paralelne, prechádza nimi rovnaký prúd a rovnaké napätie, budú teda svietiť rovnako silno.

Ostáva nám posledná otázka, či žiarovky B a C budú svietiť silnejšie alebo slabšie ako v prípade jednej žiarovky zapojenej na batériu. Spomeňme si, že v prípade paralelného obvodu je napätie v oboch vetvách rovnaké ($U = 12\text{ V}$). Predpokladáme, že odpor žiaroviek

je rovnaký (R), tak z Ohmovho zákona bude prúd $I = \frac{U}{R}$, teda rovnaký v každej vetve. Žiarovky majú teda rovnaký prúd a napätie ako v obvode s jednou žiarovkou, mali by teda svietiť rovnako.

„Mali by“ v prípade, že máme kvalitný (optimálny) zdroj, ktorý dodá potrebné množstvo prúdu. Ak budeme mať len slabú baterku, ktorá dodá prúdu menej, aj žiarovky budú svietiť slabšie. V zadaní však píšeme len 12V batéria, takže tento prípad nemusíme uvažovať.

Takže zhrnutie: žiarovka A nebude svietiť vôbec, žiarovky B a C budú svietiť navzájom rovnako a budú svietiť rovnako ako v prípade obvodu s jedinou žiarovkou.

Časté chyby: Elektrický prúd nechodí len tak hociako! Riadi sa presnými pravidlami. V križovatkách sa nerozdelí na dve rovnaké časti, ako niektorí z vás písali, ale vždy uprednostňuje cestu menšieho odporu.

Bodovanie: *Kompletné a správne riešenie* 5 b, *riešenie s drobnými chybami* 4 b až 5 b, *s nedostatočným komentárom* 2 – 4 b, *neúplné riešenie s dobrými myšlienkami* 1 – 3 b.

Úloha 5: Deň nezávislosti - opravoval Matej Duník

Most sa skladá zo siedmich prútov a piatich kĺbov (miesta, kde sa prúty stretávajú), ktoré dokopy tvoria 3 rovnomerné pravouhlé trojuholníky. Každý prút pôsobí na kĺb nejakou silou (v smere prútu), niektoré prúty sú stláčané (prúty d, e a c) a kĺby odtláčajú, iné sú ťahané (prúty a a b) a teda kĺby ťahajú k sebe. Na to, aby dokázal most stáť a nezrútiť sa, musí byť v každom kĺbe súčet vodorovných síl, rovnako ako súčet zvislých síl, rovný nule. Tento most za normálnych okolností (keď nie je ničím zaťažovaný) stojí neochvejne. Teraz však na moste pristálo UFO a pôsobí naň svojou hmotnosťou. Inžinieri zo Sveta Nesveta zistili, akými silami sú namáhané prúty a, b, c, d a e , no nepoznajú hmotnosť UFO ani sily pôsobiace na prúty f a g . **Aké ťažké je UFO? Akými veľkými silami y a z drží zem most? Sú prúty f a g stláčané alebo ťahané? Úlohu môžete riešiť napríklad graficky. Vo Svete Nesvete je ťažové zrýchlenie $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ a hmotnosť samotného mostu môžete zanedbať.**

Celý most stojí na mieste. Nemení sa ani jeho rýchlosť pohybu ani rýchlosť otáčania. Z toho vyplýva, že výslednica síl, pôsobiacich na každý prút, na každý kĺb aj na celý most, je nulová. Zároveň súčet momentov síl pôsobiacich na každý prút je nulový, lebo inak by sa prúty roztáčali, ale oni len tak nehybne stoja.

Označme si kĺb, v ktorom sa spájajú prúty d, e, f kĺb K_1 . Kĺb na druhej strane prútu e bude K_2 .

Začneme s prútom e . Iných predmetov sa dotýka len v 3 miestach. Na ľavom konci, v strede a na pravom konci, takže tlakové sily môžu pôsobiť len v týchto miestach. Inde nie.

V strede na ňom stojí UFO a pôsobí naň smerom dole silou F_x . Kĺb K_1 ho tlačí doprava silou 10 kN. Kĺb K_2 ho tlačí doľava silou 10 kN. Tieto dve sily po sčítaní dajú nulovú silu (navzájom sa zrušia). Ostáva teda sila od UFO. Ale prút sa nerozbieha smerom dole, takže predsalen naň musia ešte pôsobiť nejaké sily smerom nahor, ktoré v súčte dajú F_x . Predpokladáme, že UFO okrem spomínanej sily F_x už nijakou inou zázračnou silou na most nepôsobí, takže táto sila smerom nahor veľkosti F_x musí byť nejakou rozložená na ľavý a

pravý okraj prútu.

Nazvime tieto sily F_1 a F_2 . Ich súčet je $F_1 + F_2 = F_x$. Intuícia mi hovorí, že keďže UFO je v strede, sily na koncoch sa musia rozdeliť rovnomerne, teda na polovicu. Poďme si to overiť výpočtom. Prút sa neotáča, takže súčet momentov síl okolo ľubovoľnej osi musí byť 0. Nech dĺžka prútu je l . Zvoľme si za os otáčania kĺb K_2 .

$$l \cdot F_1 = \frac{l}{2} \cdot F_x$$
$$F_1 = \frac{F_x}{2}$$

a po dosadení do $F_1 + F_2 = F_x$, dostanem $\frac{F_x}{2} + F_2 = F_x$, takže $F_2 = \frac{F_x}{2}$.

Trochu vyššie som spomenul, že kĺb tlačí na prút. V tomto mieste sa zamyslíme, aký smer tá sila môže mať. Prút e je totiž v tomto výnimočný. O ňom už vieme, že naň kĺb K_1 pôsobí silou F_1 nahor a silou F_e doprava. Zo vzájomného pôsobenia síl vyplýva, že aj prút pôsobí na kĺb silami opačného smeru rovnakej veľkosti. Výslednica týchto síl nie je rovnobežná so samotným prútom.

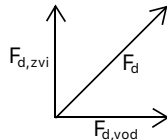
Všetky ostatné prúty však majú takú vlastnosť, že pôsobia na kĺby iba v smere rovnobežnom so sebou (buď tlačia, alebo ťahajú). Prečo? Opäť nech si zvolím ľubovoľnú os otáčania, súčet momentov musí byť 0. Tak za os zvolím jeden koniec. Pri tom konci je moment sily 0, lebo rameno je veľmi krátke. Takže pri druhom konci musí byť moment sily tiež 0 a to sa zabezpečí len tak, že veľkosť sily, ktorá pôsobí na ten druhý koniec kolmo na prút je 0 N.

Môžete si to aj vyskúšať: skúste uchopiť hrot ceruzky medzi palec a ukazovák a kamarát nech chytí opačný koniec (kde je guma) tiež medzi palec a ukazovák. Keď zatlačíte na ceruzku v smere ceruzky, alebo ju potiahnem, kamarátova ruka sa musí hýbať tiež. Nedočkajte však ceruzku otočiť okolo osi, prechádzajúcej cez hrot.

Ako je teda možné, že prút e predsaden pôsobí na kĺb v inom smere? Ak si spomínate, prút e sa dotýkal predmetov až v 3 miestach, vďaka čomu môže súčet momentov byť 0 a zároveň byť nenulový na koncoch.

Takže aké sily to pôsobia na kĺb K_1 ?

Ako reakcia na tlak na prút e pôsobí na kĺb sila F_1 nadol a sila veľkosti F_e doľava. Zároveň na tento kĺb pôsobí prút d silou F_d (a už vieme, že to je jediná sila, ktorou môže na kĺb pôsobiť) a prút f silou F_f , ktorej veľkosť síce nepoznáme, ale vieme, že smer je rovnobežný s prútom f . Najprv rozložím silu F_d na jej zvislú časť $F_{d,zvi}$ a vodorovnú časť $F_{d,vod}$:



Vo vzniknutom pravouhlom trojuholníku je F_d prepona a $F_{d,vod}$ a $F_{d,zvi}$ sú rovnaké odvesny, takže

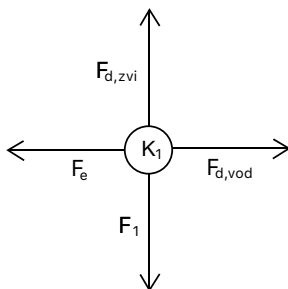
$$F_d^2 = F_{d,vod}^2 + F_{d,zvi}^2 = 2 \cdot F_{d,vod}^2$$

$$F_{d,vod} = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{14,1 \text{ kN}}{1,41} = 10 \text{ kN} = F_{d,zvi}$$

Na K_1 teda vo vodorovnom smere pôsobia sily $F_{d,vod}$ smerom doprava a F_e smerom doľava a obe majú rovnakú veľkosť, takže po ich sčítaní dostaneme 0. K silám vo vodorovnom smere ešte môže prispieť sila, ktorou pôsobí prút f , ale žiadny iný predmet na tento kĺb nepôsobí. Ak by teda nejaká sila prútu f tlačila kĺb buď doľava alebo doprava, výsledná vodorovná sila by bola nenulová a tým pádom by neplatila podmienka zo zadania, že súčet vodorovných síl musí byť rovný 0. Jediná možnosť teda je, že prút pôsobí iba smerom hore alebo dole. Ale tento smer nie je rovnobežný s prútom, takže túto možnosť môžeme tiež vylúčiť.

V zvislom smere na K_1 pôsobí sila $F_{d,zvi}$ smerom hore a F_1 smerom dole a žiadna iná. Súčet týchto síl musí byť 0, takže ich veľkosti sa rovnajú $F_1 = F_{d,zvi} = 10 \text{ kN}$.

Silu F_1 môžem dosadiť do nejakej rovnice úplne na začiatku $F_x = \frac{F_x}{2}$ a dostanem $F_x = 2 \cdot F_1 = 20 \text{ kN}$.



A z tiažovej sily F_x ľahko dorátam hmotnosť UFA $m = \frac{F_x}{g} = \frac{20 \text{ kN}}{10 \text{ N/kg}} = 2 \text{ t}$.

Pozornejší z vás si všimli, že prút f nepôsobí žiadnou silou na kĺb K_1 . Tým pádom ani kĺb K_1 nepôsobí silou na prút f . A keďže súčet síl pôsobiacich na prút musí byť nulový, tak ani druhý kĺb nemôže na prút f pôsobiť žiadnou silou. Čiže tu je odpoveď na ďalšiu otázku: prút f nie je naťahovaný ani stláčaný.

Posledná nezodpovedaná otázka sa týka síl, ktorými zem drží most. Celý most aj s UFOM má hmotnosť 2 t a tá je rozložená rovnomerne medzi miesta y a z (viď. výpočet pre prút e). Takže zem v mieste y pôsobí na most smerom nahor silou 10 kN a v mieste z rovnakou silou.

Bodovanie: Za určenie hmotnosti UFA a síl, ktorými zem pôsobí na most 1 b, za zdôvodnenie 1,5 b, za správnu odpoveď, že prúty f , g nie sú naťahované ani stláčané 1 b, a za zdôvodnenie opäť 1,5 b.