



### Vzorové riešenia 3. série letnej časti

#### Úloha 1: Cyklistická! - opravovala Hana Mertanová

Bohdan sa rád bicykluje. Aby to nemal také ľahké, jazdí hore a dole kopcom. Raz si povedal, že skúsi vyjsť a zísť ten istý kopec dvakrát, aby videl, akú má kondičku. Prvýkrát išiel pri ceste hore rýchlosťou  $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . **Ako rýchlo išiel cestou dole, ak mal celkový priemer rýchlostí hore a dole kopcom pri prvom pokuse  $30 \text{ km/h}$ ?** Druhýkrát už bol trochu unavený a vyšiel kopec priemernou rýchlosťou iba  $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . **Ako rýchlo musí ísť Bohdan dole kopcom teraz, aby mal pri druhom pokuse priemer rýchlostí hore a dole kopcom  $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ?**

Najskôr si uvedomíme, čo je to vlastne tá priemerná rýchlosť. Priemerná rýchlosť je pomer celkovej dráhy a celkového času. Keďže Boďo prešiel rovnakú dráhu s hore aj dole kopcom, priemerná rýchlosť sa teda rovná  $v_p = \frac{2s}{t_1 + t_2}$ .

$s$  = dráha na kopec (rovnaká ako z kopca),  $t_1$  = čas, za ktorý vyšiel hore,  $t_2$  = čas, za ktorý zišiel dolu,  $v_1$  = rýchlosť, ktorou šiel nahor,  $v_2$  = rýchlosť, ktorou šiel nadol,  $v_p$  = priemerná rýchlosť. Čas, za ktorý vyšiel hore si vyjadríme ako  $t_1 = \frac{s}{v_1}$  a čas  $t_2 = \frac{s}{v_2}$ .

$$v_p = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2s}{s \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} = \frac{2}{\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}}$$

$$\frac{v_p}{2} * (v_1 + v_2) = v_1 * v_2$$

Pre oba prípady dosadíme za priemernú rýchlosť  $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Pre prvý prípad dosadíme  $v_1 = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , pre druhý prípad  $v_1 = 15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .

Prípad 1:

$$15 \cdot (20 + v_2) = 20 \cdot v_2$$

$$300 + 15 \cdot v_2 = 20 \cdot v_2$$

$$300 = 5 \cdot v_2$$

$$v_2 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Prípad 2:

$$15 \cdot (15 + v_2) = 15 \cdot v_2$$

$$225 + 15 \cdot v_2 = 15 \cdot v_2$$

$$225 = 0 \cdot v_2$$

Rovnica nemá riešenie, čo znamená, že aj keď je Boďo nepochybne vynikajúci cyklista, v druhom prípade nevyvinie pri jazde z kopca dostatočnú rýchlosť, aby priemerná rýchlosť bola  $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Rovnica vlastne hovorí, že aby dosiahol priemernú rýchlosť  $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , z kopca by musel zísť za čas 0 s, čo nie je možné.

Bodovanie: Za správne vysvetlenie priemernej rýchlosti 1,5 b, za výpočet, odvodenie, vysvetlenie 3 b a správne výsledky 0,5 b.

## Úloha 2: Koniec dobrý, všetko dobré - opravovala Zuzana Bogárová - Bum

Všetci poznáme príbeh o 7 kozliatkach. Keď pažravý vlk zaspal, rozrezala mu mama koza brucho, z ktorého vyskočili jej malé ratolesti bez jediného škrabnutia. Lenže vlka sa treba raz a navždy zbaviť, skôr, než sa zobudí. Preto kozliatka nanosili kamene a mama koza ich šikovne povkladala vlkovi do brucha. Už mu chcela brucho zašit' a hodiť ho do studne, keď kozička Fyzička vraví, že to treba pre istotu prepočítať. **Pomôžte kozliatkam zistiť, akú hmotnosť musia mať kamene, aby vlk ostal na dne studne a nevynoril sa!** Predpokladajme, že telo vlka má hustotu ako voda v studni a vlk má pred potopením v pľúcach 3 litre vzduchu.

Ahojte. Najskôr si povedzme, čo to tá hustota vlastne je. Hustota je veličina, ktorá popisuje pomer medzi hmotnosťou a objemom danej látky. Má značku  $\rho$  a matematicky sa tento vzťah zapíše ako  $\rho = \frac{m}{V}$ . Poviete si na čo vôbec niečo také vymýšľať, veď na to, aby som ju zistil aj tak potrebujem hmotnosť a objem nejakej veci a nová veličina je aj tak iba ich podiel. To čo je na tom zaujímavé je, že ak mám nejakú látku (voda, železo, olovo, zlato), tak hustota je vlastnosť, ktorá sa "takmer vôbec" nemení. O tom prečo sa hustota môže meniť sa budete učiť na strednej škole, koho by to zaujímalo už teraz zadajte do vyhľadávača „Thermal expansion“.

Ak sa pozrieme na wikipediu tak zistíme, že na nej nájdeme hustoty rôznych materiálov. Napríklad vzduch má  $1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , voda  $1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , železo  $7870 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

Vďaka tomu sa dajú robiť rôzne super veci. Napríklad stačí merať objem danej veci aby sme vedeli, akú bude mať hmotnosť. Tým pádom sa dá spraviť odmerka, vďaka ktorej nemusíme mať váhu, aby sme zistili, koľko múky a cukru ideme dať do koláča. Na druhej strane, ak sa nám ľahšie meria hmotnosť, môžeme navážiť príslušné množstvo a dostaneme očakávaný objem látky.

Problém ale je, že v tabuľkách nenájdeme hustotu "hocičoho". Zoberme si takú prázdnu plastovú fľašu. Vieme zistiť hustotu plastu (približne  $970 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ) aj vzduchu ( $1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ), to nám ale veľmi nepomôže na to, aby sme zistili hustotu fľaše. Výsledná hustota bude závisieť od toho aká hrubá je fľaša. Preto nevieme spraviť nič iné, iba hustotu fľaše so vzduchom vypočítať z jej hmotnosti a objemu. Odvážime fľašu (napr. 50 g), zistíme jej objem približne 1 l a vypočítame hustotu. V tomto prípade dostávame  $50 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Skúsme sa zamyslieť ako sa zmení hustota fľaše, ak by sme do nej pridali trochu kameňov napr. 50 g. Výsledná hustota bude teda (hmotnosť fľaše + hmotnosť kameňov) deleno objem fľaše. Po novom nám vyjde hustota  $100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Čo by sa však stalo, ak by sme kameňky nedali dnu do fľaše, ale priviazali zvonku? Okrem hmotnosti celku by sa zmenil aj objem a teda po novom by sme museli počítať hustotu ako: (hmotnosť fľaše + hmotnosť kameňov) deleno (objem fľaše + objem kameňov). Ak by sme rátili s hustotou kameňa  $2600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , tak výsledná hustota vyjde.

$$\text{Hustota} = \frac{100 \text{ g}}{1 \text{ dm}^3 + 0,0192 \text{ dm}^3} = 98,11 \frac{\text{g}}{\text{dm}^3}$$

Tento výsledok je mierne iný ako pôvodných  $100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , čo je spôsobené tým, že v prvom prípade sa objem sústavy nemenil a v druhom už áno.

Vyzbrojení týmito poznatkami sa pozrime na naše zadanie. Hovorí nám, že vlk telo vlka má rovnakú hustotu ako voda, ale v pľúcach má vzduch. Vďaka tomuto vzduchu bude plávať na hladine a neponorí sa. Sila, ktorá to spôsobí sa volá vztlaková. Vďaka 3 litrom vzduchu je veľkosť vztlakovej sily 30 N.

Na to, aby sa vlk utopil musíme ho zaťažiť jeho gravitačnou silou ktorá by prevýšila vztlakovú silu 30 N. V tomto bode ste mohli zadanie pochopiť dvoma spôsobmi. Či pridanie kameňov zmení objem vlka alebo nie.

Skúsme vypočítať hmotnosť kameňov v oboch prípadoch.

V prípade, že rátame s tým, že pridanie kameňov nezmení objem vlka je výpočet jednoduchší:

$$F_g = F_{vz}$$

$$M \cdot g = V \cdot \rho_{vody} \cdot g$$

$$M = V \cdot \rho_{vody} = 3 \text{ kg}$$

V druhom prípade rátame s tým, že pridanie kameňov mení aj objem vlka. Najprv si vypočítajme objem kameňov, ktoré pridáme do brucha vlka.

$$V_{\text{kameň}} = \frac{m_{\text{kameň}}}{\rho_{\text{kameň}}}$$

$$F_g = F_{\text{vzduch}} + F_{\text{kameň}}$$

$$M \cdot g = V_{\text{vzduch}} \cdot \rho_{\text{voda}} \cdot g + V_{\text{kameň}} \cdot \rho_{\text{voda}} \cdot g$$

$$M = V_{\text{vzduch}} \cdot \rho_{\text{voda}} + \frac{m_{\text{kameň}} \cdot \rho_{\text{voda}}}{\rho_{\text{kameň}}}$$

$$M \cdot \left(1 - \frac{\rho_{\text{voda}}}{\rho_{\text{kameň}}}\right) = V_{\text{vzduch}} \cdot \rho_{\text{voda}}$$

$$M = \frac{V_{\text{vzduch}} \cdot \rho_{\text{voda}}}{\left(1 - \frac{\rho_{\text{voda}}}{\rho_{\text{kameň}}}\right)} = \frac{V_{\text{vzduch}} \cdot \rho_{\text{voda}} \cdot \rho_{\text{kameň}}}{\rho_{\text{kameň}} - \rho_{\text{voda}}} = \frac{3000 \text{ cm}^3 \cdot 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 2,6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}{1,6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} = 4875 \text{ g}$$

Oba prístupy sú správne, záleží len od toho, ako ste pochopili zadanie.

*Bodovanie: Ak ste správne pochopili princíp vztlakovej sily 1 b, ak ste opísali, ako ste postupovali pri výpočte 2 b a ak ste sa dopočítali ku správnemu výsledku 2 b.*

### Úloha 3: Možné riešenie - opravovala Barbora Hoffmanová

Naša Zem sa pomaly zohrieva. Vraví sa, že hladiny morí stúpajú kvôli topiacim sa pevninovým ľadovcom. Ak je to skutočný dôvod, možno by nevyhnutná záhuba nízko položených krajín prišla neskôr, ak by Antarktída nebola pokrytá zamrznutou vodou, ale inou zamrznutou tekutinou. Ba čo viac, zistenie, že ľad z iného materiálu, než z vody, vydrží zmrznutý dlhšie, môže navždy poznamenať miešané nápoje tak, ako ich poznáme.

**Nechaj zamrznúť rôzne tekutiny (čistá voda, citrónová šťava, sirup, olej, slaná voda...) rovnakého objemu. Pozoruj, ako rýchlo sa jednotlivé tekutiny pri izbovej teplote rozpustia. Porovnaj čas topenia týchto tekutín. Od čoho tento čas závisí?**

Najprv sme si cez noc nechali zmraziť čistú vodu, citrónovú šťavu, sirup, olej a slanú vodu vo formičke na ľad. Ráno sme ich vybrali a pri izbovej teplote nechali roztápať. Ako prvý sa roztopil olej (nebol úplne zamrznutý) za 15 minút, sirup a citrónová šťava sa roztopili za 27 minút, potom slaná voda za 29 minút a voda za 37 minút.

Tento rozdiel medzi jednotlivými látkami spôsobuje viacero faktorov. Najskôr sa látka musí ohriať z mrazákovej teploty na teplotu topenia. Prvý faktor teda je teplota topenia látky a druhý je jej tepelná kapacita. Tá hovorí o tom, koľko tepla musí látka prijať, aby sa ohriala o  $1^{\circ}\text{C}$ .

Ďalším dôvodom rozdielneho topenia jednotlivých kociek je skupenské teplo topenia  $L$ , ktoré hovorí o množstve tepla, ktoré prijíma pevná látka pri prechode na kvapalnú počas topenia.

Skupenské teplo topenia môžeme vyjadriť ako  $L = l \cdot m = l \cdot \rho \cdot V$ , kde  $l$  je merné skupenské teplo topenia danej látky,  $\rho$  je jej hustota,  $m$  hmotnosť a  $V$  objem. Látky s väčším merným skupenským teplom  $l$  a látky s väčšou hustotou musia prijať viac tepla na roztopenie. Budú sa teda topiť pomalšie.

*Bodovanie: Za rôzne kvapaliny, ktoré ste nechali zmraziť 1 b. Ak ste odmerali rýchlosti topenia 1 b. Za vzájomné porovnanie 1 b, za opis postupu 1 b a za vysvetlenie rozdielnych časov 1 b.*

#### Úloha 4: Výhybková dilema - opravoval Šimon Pajger

Vlak s hmotnosťou 200 t si to šinie po koľajniciach rýchlosťou  $97,2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Kvôli technickej chybe je vlak na kolíznej trajektórii so stojacim vagónom plným nič netušiacich ľudí. Keďže rušňovodič nie je žiadny filozof a medzi ním a vagónom plným nič netušiacich ľudí je ešte 150 m trate, nepremýšľala o prehadzovaní výhybiek, ale začne radšej brzdiť.

**Akú bude mať vlak rýchlosť po 75 metroch brzdenia? Dobrzdí pred vagónom plným nič netušiacich ľudí?** Brzdy vlaku pôsobia brzdou silou 3 kN na každých 1000 kg vlaku.

Pri pohľade na zadanie vidíme, že sa to celé točí okolo rýchlostí a síl. Tak si spomeniem (prípadne vygooglim), že kinetická energia je  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  kde  $m$  je hmotnosť vlaku a  $v$  je rýchlosť vlaku. Práca je zase  $W = F \cdot s$  čiže sila brzdenia krát brzdná dráha. Zároveň platí zákon o zachovaní energie, ktorý hovorí, že energia sa nevytvára ani nestráca, len mení svoju formu. Keď vlak brzdí, premieňa svoju kinetickú energiu na teplo, zvuk... Každopádne jeho kinetická energia klesne presne o toľko, koľko práce vykonali brzdy. Takže môžeme zostaviť rovnicu

$$E_{k1} = W + E_{k2}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - F \cdot s = \frac{1}{2}mv_2^2$$

Vieme, že brzdy pôsobia silou 3 kN na 1000 kg vlaku, čiže  $3 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ . Z toho vyplýva, že sila bude  $F = m \cdot a$ , kde  $a = 3 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ . Dosadíme to do rovnice.

$$\frac{1}{2}m \cdot v_1^2 - m \cdot a \cdot s = \frac{1}{2}mv_2^2$$

Vidíme, že hmotnosť je vo všetkých členoch, takže môžeme celú rovnicu predeliť  $m$  (áno, hmotnosť vlaku ste v tomto príklade vôbec nepotrebovali). Zároveň, aby sme osamostatnili našu neznámu (rýchlosť po 75m) vynásobíme celú rovnicu 2.

$$v_1^2 - 2 \cdot a \cdot s = v_2^2$$

Teraz je už čas na to aby sme sa pozreli na zadané čísla. Pôvodnú rýchlosť si premeníme na základné jednotky  $97,2 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 27 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Keďže chceme rýchlosť po 75m, tak brzdná dráha je 75m.

$$v_2^2 = \left(27 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 2 \cdot 3 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 75 \text{ m} = (729 - 450) \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 279 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$$

$$v_2 = \sqrt{279} \frac{\text{m}}{\text{s}} \doteq 16,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ďalej sa zadanie pýta, či vlak zastaví do 150 m. Stojaci vlak znamená nulová rýchlosť, čiže nulová kinetická energia, čiže práca vykonaná brzdami sa musí rovnať pôvodnej kinetickej energii.

$$E_{k1} = W$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = F \cdot s$$

Všetko je rovnaké ako minule, akurát teraz je neznáma dráha po ktorej pôsobí brzdná sila.

$$\frac{1}{2} m \cdot v_1^2 = m \cdot a \cdot s$$

$$s = \frac{v_1^2}{2 \cdot a} = \frac{27^2}{2 \cdot 3} \text{ m} = \frac{729}{6} \text{ m} = 121,5 \text{ m}$$

Vlak stihne zabrzdziť pred vagónom nič netušiacich ľudí.

Bodovanie: Za každú podúlohu bolo 2,5 b, z toho iba po 0,5 b za správny výsledok, takže za rozumný postup ste mohli získať po 2 b

### Úloha 5: Pestrá - opravoval Bohdan "Boďo" Józsa

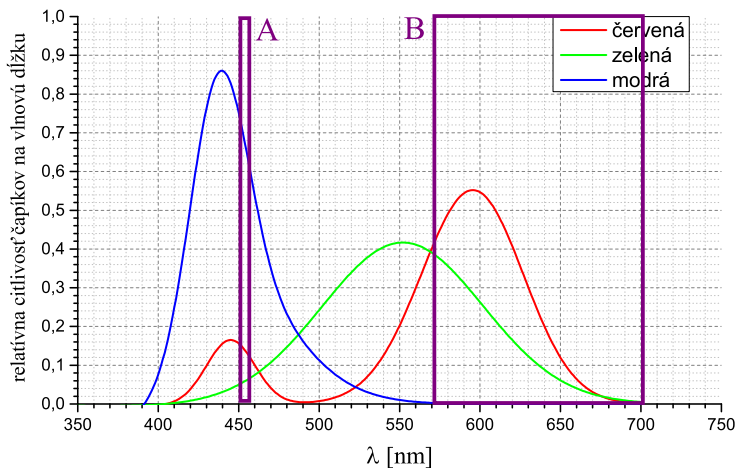
**S akou farbou si môže človek, ktorý v oku nemá modré čapíky, pomýliť jasnú žltú farbu (600 nm)? V akej oblasti vlnových dĺžok nedokáže rozlíšiť farby človek, ktorý nemá zelené čapíky?**

Najprv si musíme uvedomiť, ako mozog rozoznáva jednotlivé farby. V podstate si zistí, aký silný signál posielajú čapíky jednotlivých farieb. Inak povedané, oko vidí nejaké svetlo, a podľa citlivosti čapíkov pošle mozgu informáciu, aká časť toho svetla je červená, aká časť je modrá a aká je zelená.

Teraz už ľahko zistíme, s ktorou farbou si človek bez modrých čapíkov mýli žltú. Pri žltej neposielajú modré čapíky žiadny signál, červený a zelený signál je zhruba v pomere 2:1, je to trochu viac, ja som z grafu vyčítal 2,07 ale uznával som približne podobné hodnoty. Keďže modré čapíky neposielajú žiadny signál, musíme nájsť takú farbu, pri ktorej posielajú

červené a zelené čapíky signál v rovnakom pomere. Jeden taký bod je niekde medzi 450 a 460 nm. Niektorí ste napísali aj niekde okolo 650 nm, aj to som uznával. Niektorí však tvrdili, že kvôli tomu, že na vnímanie žltej modré čapíky nepotrebujeme, si žltú farbu nemožno pomýliť. To nie je pravda, preto som takéto riešenie neuznával.

Farby človek nemôže rozlíšiť v takom rozmedzí vlnových dĺžok, kde všetky farby vidí ako jednu. Potom keď takú farbu vidí, nevie rozoznať, akú vlnovú dĺžku má to svetlo, lebo to môže byť hocijaká z daného rozmedzia. Najväčšia takáto oblasť je od cca 570 nm ďalej, kde vďaka absencii zelených čapíkov neberieme do úvahy zelenú krivku a modré čapíky žiadne signály neposielaajú, teda v tejto oblasti človek bez zelených čapíkov vidí iba čisto červenú. Trochu menej výrazná je oblasť cca 570 - 590 nm, kde zas signály neposielaajú červené čapíky, teda celá oblasť sa javí ako čisto modrá.



Obr. 1: A - oblasť s rovnakým pomerom červenej a zelenej, aký má žltá farba. B - oblasť, v ktorej bez zelených čapíkov nerozoznáme farby

Veľmi veľa z Vás napísalo celú oblasť, na ktorej sú citlivé zelené čapíky, teda 400 - 700 nm. V tejto oblasti síce človek bez zelených čapíkov nebude vidieť farby správne, ale bude vedieť jednotlivé farby rozlíšiť, teda okrem spomenutých správnych oblastí. Za takúto odpoveď som dal čiastočné body.

**Bodovanie:** Za každý približne správny výsledok 1 b, za každé správne odôvodnenie 1,5 b. Za čiastočne správne odôvodnenia a výsledky som dával čiastočné body, napríklad za oblasť 400 - 700 nm v druhej otázke som dával 0,5 b.