Vzorové riešenia 1. série zimnej časti

Úloha 1: Soľ nad zlato! - *opravovali Dominika Iždinská a Patrik Rusnák*
Terka si z každej dovolenky donesie trochu morskej vody. Má 3 dl morskej vody z Čierneho mora, 2 dl z Karibského mora a $1\,\ell$ z Kaspického mora. Jej otcovi sa prestalo páčiť, že svojou zbierkou zaberá niekoľko hrncov, takže jej všetky vody zlial do jedného veľkého džbánu. **Aký je percentuálny obsah soli vo vode v džbáne?**

Ako prvé bolo treba zistiť slanosť (salinitu) všetkých troch morí, keďže tá je u každého z nich iná. Potrebné údaje sme našli na internete. Čierne more má slanosť okolo 18‰, Karibské more okolo 36‰ a Kaspické more okolo 13‰. Promile (‰) v našom prípade znamená hmotnosť soli v gramoch obsiahnutú v jednom litri vody. Táto úloha sa dala vypočítať dvoma spôsobmi:

1) Najprv si zistíme hmotnosť soli v jednotlivých nádobách:
Voda z Čierneho mora má 3dl a hmotnosť soli v 1l je 18 g => v 1dl jej bude $1{,}8$ g => v 3dl jej bude $1{,}8\,\mathrm{g} \cdot 3 = 5{,}4\,\mathrm{g}$
Voda z Karibského mora má 2dl a hmotnosť soli v 1l je 36 g => v 1dl jej bude $3{,}6$ g => v 2dl jej bude $3{,}6\,\mathrm{g} \cdot 2 = 7{,}2g$
Voda z Karibského mora má 1l a hmotnosť soli v 1l je 13 g => v 1l jej bude 13 g.

POZOR! Aj keď zmenšíme objem vody tak v nej bude stále rovnako veľa promile rozpustenej soli, pretože soľ je vo vode pravidelne rozmiestnená.

Vieme, že v celkovom objeme vody sa nachádza $5{,}4\,\mathrm{g} + 7{,}2\,\mathrm{g} + 13\,\mathrm{g} = 25{,}6\,\mathrm{g}$ soli. Celkový objem vody:

$$V = V1 + V2 + V3 = 3dl + 2dl + 1l = 3dl + 2dl + 10dl = 15dl = 1{,}5l$$

Keďže salinita sa počíta ako hmotnosť rozpustenej soli na jednotku objemu, hmotnosť soli musíme vydeliť celkovým objemom našej vody: $\frac{25{,}6g}{1{,}5l} = 17{,}1$‰. Slanosť vody, čiže percento rozpustenej soli je približne $17{,}1‰ = 1{,}71\%$.

2) V druhom postupe spravíme vážený priemer saliním, pričom váhy budú predstavovať objemy vôd z jednotlivých morí v pomere k celkovému objemu vody. Označíme si jednotlivé objemy V_i a percentuálne obsahy soli vo vode S_i:

Čierne more: $V_1 = 3dl$ Slanosť $S_1 = 18‰ = 1{,}8\%$

Karibské more: $V_2 = 2dl$ Slanosť $S_2 = 36‰ = 3{,}6\%$

Kaspické more: $V_3 = 10dl$ Slanosť $S_3 = 13‰ = 1{,}3\%$

Teraz si zistíme celkový objem vody: $V = V_1 + V_2 + V_3 = 3dl + 2dl + 10dl = 15dl$ Po zmiešaní bude výsledná slanosť $S = 1{,}71\%$.

$$V_1 \cdot S1 + V_2 \cdot S2 + V_3 \cdot S3 = (V_1 + V_2 + V_3) \cdot S$$

$$S = (V_1 \cdot S_1 + V_2 \cdot S2 + V_3 \cdot S_3)/(V_1 + V_2 + V_3)$$

$$S = (3dl \cdot 1{,}8\% + 2dl \cdot 3{,}6\% + 10dl \cdot 1{,}3\%)/(15dl)$$

$$S = 1{,}71\%$$

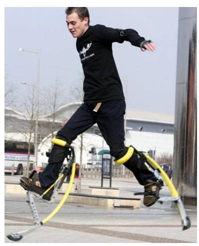
Bodovanie: *Za nájdenie a využite hodnôt jednolivých salinít $1{,}5$ b, uvedomenie si rovnomerného rozpustenia soli 1 b, správne využitie jednotlivých objemov ako váh 1 b, výpočet a popis postupu 1 b, požitie správnych jednotiek $0{,}5$ b.*

Úloha 2: Konkurencia - *opravovala Hana Mertanová*
Zimné sústredenie je ešte ďaleko, no dopravu naň si treba premyslieť čo najskôr. Cestovanie vlakom je síce super (a zadarmo), ale vedúci chcú účastníkom cestu na sústredko nejako ozvláštniť. Účastníci sú z rôznych kútov Slovenska, takže to nemajú také ľahké. **Na internete alebo v encyklopédii vyhľadaj nezvyčajný dopravný prostriedok, ktorým sa účastník z Ľuboriečky, Šalgočky a Ťapešova (spolu 3 rôzne dopravné prostriedky) dopraví na sústredenie - do Juskovej Vole. Na základe vzdialenosti dedín a rýchlosti dopravných prostriedkov vypočítaj celkový čas cesty pre každého z nich.** Dopravné prostriedky nemusia byť nutne dostupné na Slovensku, hodnotí sa ich originalita.

Poďme sa pozrieť kde tie naše dedinôčky ležia. Napríklad otvoríme google-maps a zistíme, že sú pekelne ďaleko.
Čas vypočítame podľa vzorca $t = \frac{s}{v}$, teda vzdialenosť vydelíme rýchlosťou príslušného dopravného prostriedku.

	Cestná vzdialenosť [km]		Pešia vzdialenosť [km]
	s diaľnicami	bez diaľnic	
Ľuboriečka- JV	231	234	208
Šalgočka -JV	397	391	363
Ťapešovo -JV	255	231	212

Teraz vymyslíme nejaké cool dopravné prostriedky, ktoré budú všetci obdivovať. Keďže Ľuboriečka je oproti ostatným len na skok, využije nedočkavý účastník skákacie sedemmíľové topánky. (Z anglického powerising jumping stilts, slovenský preklad nikdy nesklame). Dosahujú rýchlosť až $32\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ale účastník predsalen nepôjde celú cestu plnou rýchlosťou a niekedy ho terén prinúti ísť peši, budeme teda počítať s $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.



$$t_1 = \frac{208\,\text{km}}{15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 13{,}87\,\text{h}$$

K tomuto času pripočítame prestávku na obed a odpočinok cca $2\,\text{h}$. Účastníkovi to bude trvať $15{,}87\,\text{h}$.

Účastník zo Šalgočky to má dosť ďaleko, tak použije tangah. Ešte ste o ňom nepočuli? Jazdí sa na ňom napríklad v Pakistane. Kôň, ktorý ťahá takýto vozík sa pohybuje približne $10 - 15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, keďže ideme dlhú vzdialenosť. Na to aby sme šli bez prestávky však budeme musieť koňa po ceste vymeniť. Vezmeme strednú rýchlosť $12{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

$$t_2 = \frac{391\,\text{km}}{12{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 32{,}58\,\text{h}$$

Účastník zo Šalgočky sa na sústredko dostane za neuveriteľných $32{,}58$ hodín.

Účastník z Ťapešova pôjde povačšinou z kopca, takže použije niečo bicykloid né. Môže si vybrať medzi hyperbikom a pojadzným gaučom (viz. obrázok). Hyperbike dosahuje rýchlosti až okolo $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ale musíme dbať aj na fyzičku účastníka, jeho priemerná rýchlosť bude tak $20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$$t_3 = \frac{231\,\text{km}}{20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 11{,}55\,\text{h}$$

Účastník z Ťapešova pôjde krásnych $11{,}55\,\text{h}$ + 2 hodiny na odpočinok.

Pozn. : ak by účastníci chceli ísť napríklad coraclom, museli by si nájsť vodnú trasu. Podobne, ak ste zvolili lietajúci dopravný prostriedok, bolo treba uvažovať vzdušnú vzdialenosť.

Bodovanie: $5\ b$ *bodov za kompletné riešenie (správny postup, vypočítané časy, nezvyčajné prostriedky, správne zvolené vzdialenosti). Menej bodov bolo za drobné chyby (napríklad nevhodné vzdialenosti vzhľadom na typ dopravy), podľa závažnosti chyby. Taktiež ste mohli stratiť* $0{,}2\ b$ *bodu za obyčajné vozidlo (napr. vlak).*

Úloha 3: Poklad na Striebornom jazere - *opravovala Zuzana Bogárová – Bum*
Polož na hladinu vody kancelársky papier formátu A4. Zisti, koľko najviac naňho dokážeš naukladať mincí bez toho, aby sa potopil. Pokus zopakuj po tom, ako do vody pridáš malé množstvo saponátu. V ktorom prípade udrží papier viac mincí?

Ahojte. Prvé, čo musíme spraviť, je uvedomiť si, čo na správne riešenie tohto príkladu potrebujeme. Táto úloha je experimentálna, teda tento pokus naozaj musíme urobiť. Tak poďme na to.

Nachystala som si vedro s vodou, papiere a hromadu mincí. Opatrne som položila papier na hladinu vody a môžeme začať ukladať mince. Pomaly ale isto som na papier veľkosti A4 začala ukladať 5 centové mince. Najskôr som si povedala, že vyskúšam ako tie mince na papier vlastne uložiť. Dať všetky nad seba do stredu papiera asi nebude ideálne riešenie, takže bude lepšie ak ich rovnomerne rozmiestnim po papieri. Na to tiež môžeme voliť dva postupy. Buď začať rohami a ísť smerom do stredu, alebo začať od stredu. Skúsila som oba postupy. Keď začnem mince ukladať na rohy, tak sa mi to hneď potopí. Keď idem od stredu tak to drží ako divé a môžem ukladať mince. Takže budem ukladať tým druhým spôsobom.

Podarilo sa mi ich tam uložiť 36, potom sa mi už papier potopil. Teraz začína tá sranda s pokusom. Nemôžem očakávať, že z jedného merania získam normálny výsledok, preto potrebujem tento pokus viackrát zopakovať. Aj keď to vyzerá, že veď musím získať podobný výsledok, aj tak ho zopakujem. Aby to bolo prehľadnejšie, všetko pekne zapíšem do tabuľky. Vyskúšam na papier ukladať aj iné mince ako 5 centové, skúsime tie najväčšie, teda 2 eurové.

Teraz prejdeme na druhú časť pokusu, a to že pridám do vody trochu saponátu. Aby sme mohli tieto merania porovnať s meraním s čistou vodou, budeme robiť úplne to isté. Takže skúsime najskôr 5 centové mince a neskôr budeme ukladať 2 eurové. Všetko si tak isto zapíšeme do tabuľky a môžeme porovnávať.

	Čistá voda		Saponátová voda	
	5 centov	2 eurá	5 centov	2 eurá
1. pokus	36	5	23	2
2. pokus	39	4	21	1
3. pokus	34	5	24	2
4. pokus	36	6	23	2
5. pokus	43	5	20	2
6. pokus	37	5	25	3
7. pokus	38	5	22	2
8. pokus	38	4	21	1
9. pokus	40	5	19	2
10. pokus	35	6	23	2
Priemer	37,6	5	22,1	1,9

Z tabuľky môžeme vidieť, že voda so saponátom udržala menej mincí na hladine ako čistá voda. Prečo to tak asi je? Na rozlúsknutie tohto problému si najskôr vysvetlime, čo to povrchové napätie je.

Povrchové napätie je spôsobené priťahovaním medzi molekulami kvapaliny rôznymi medzimolekulárnymi silami. Vnútri kvapaliny je každá molekula priťahovaná rovnako všetkými smermi. Na povrchu sú molekuly priťahované dovnútra ďalšími molekulami, ale nie sú priťahované rovnakou silou molekulami susednej látky, v našom prípade je to vzduch. V dôsledku toho sú všetky molekuly na povrchu kvapaliny sústavne vťahované dovnútra. Povrchové napätie spôsobuje, že sa povrchová vrstva správa ako elastická blana. Preto na ňu vieme niečo položiť. Keď pridáme do vody saponát, jeho molekuly sa rozmiestnia pomedzi molekuly vody. Toto nám spôsobí, že povrchové napätie bude teraz nižšie ako bolo čistej vody. Preto sme nevedeli na saponátovú vodu poukladať rovnaké množstvo mincí ako na čistú vodu. V našom prípade keď sme na hladinu vody ukladali najskôr papier a potom mince sa zníženie povrchového napätia prejavilo aj inak. Keď sa papier položil na hladinu čistej vody, nenasával veľa vody a ostal dlhšie suchý. Ak sme ho položili na saponátovú vodu, tým že je nižšie povrchové napätie, papier oveľa jednoduchšie vedel nasať vodu, a tým sa viac zmáčal. A mokrý papier čo? No klesne na hladinu. No a tu to máme.

Zase sme sa naučili niečo nové, a ešte raz si zopakujeme, čo taký správny pokus musí v sebe mať. Musíme opísať ako sme ho urobili a čo sme na to použili. Merania treba vždy opakovať. Ak chceme porovnať dve merania, snažíme sa čo najviac vecí spraviť rovnako. A na záver zhrnieme, že čo sme vlastne namerali. Nie je to vôbec také zložité a navyše je to aj sranda.

Bodovanie: *Ak ste opísali, ako ste tento pokus robili a čo ste na to potrebovali* $2\ b$. *Za porovnanie čistej vody a vody so saponátom* $1\ b$. *Keď ste merania zopakovali* $0{,}5\ b$. *A za zhrnutie výsledkov na konci experimentu* $1{,}5\ b$.

Úloha 4: Sila s Tebou - *opravovala Miška Ždimalová*

Tohtoročné leto bolo mimoriadne bohaté na ovocie. Tiborova mama zavárala broskyňový kompót. Tibor si chcel jeden pohár otvoriť k obedu, no cez leto zabudol navštevovať posilňovňu a viečko nevedel vôbec odkrútiť z pohára. „Na to treba nadľudskú silu!“, celý nazlostený hodil pohár o zem.

Vysvetlíš Tiborovi, prečo drží viečko na zaváraninovom pohári tak silno?

Ahojte. Väčšine z vás sa podarilo prísť na hlavný dôvod, prečo sa Tiborovi otvára viečko zo zaváraninového pohára tak ťažko. Nie je to kvôli tomu, že nechodil v lete do posilňovne, ale kvôli podtlaku. Avšak niektorým z Vás ešte možno nie je úplne jasné ako a prečo tam tento podtlak vzniká. Tak sa poďme na to spolu pozrieť.

Tiborova mama má zaváraninový pohár plný broskýň zaliaty vodou/sirupom. Ako bude zavárať? Zoberie pohár, dá naň viečko a len ho zašróbuje. Samozrejme jej tam ostal nejaký vzduch, pretože nevie naplniť pohár vodou/sirupom až doplna. Spolu s ostatnými pohármi ho dá do horúceho kúpeľa. Pohár, aj s jeho obsahom, sa začne zahrievať. Molekuly plynu (vzduchu) navrchu sa kvôli zvýšenej teplote začnú pohybovať rýchlejšie, a teda akoby potrebujú viac miesta - chcú zväčšiť objem tohto plynu. Avšak je ho tam už priveľa a keď sa chce zväčšiť, tak nejakú svoju časť musí vytlačiť cez zašróbované viečko pomedzi škáry von.

Čo sa stane, keď pohár z horúceho kúpeľa vyberieme? Začne sa naspäť ochladzovať. Chladnutím sa zasa molekuly plynu začnú hýbať pomalšie a začnú zmenšovať objem plynu. Tým sa zníži aj tlak plynu a začne vznikať podtlak. Ten pricucne viečko k poháru (vytvorí sa priehlbinka), a teda plyn už nemôže nasávať vzduch z okolia, aby si vyrovnal objem a tlak. A toto pricucnuté viečko vytvára Tiborovi veľké trenie, keď sa ho snaží otvoriť. Preto mu to ide tak veľmi ťažko. :) (Spôsobov zavárania je viacero, preto som mierne odlišnosti od tohto spôsobu uznávala aj v bodovaní.)

Bodovanie: *Za spomenutie podtlaku (v správnom zmysle), som udelila $2\ b$. Ďalšie $3\ b$ som pridávala podľa toho, do akej miery bol vysvetlený vznik podtlaku.*

Úloha 5: Otrasná - *opravoval Bohdan Jóža – Boďo*
Pomocou priložených záznamov zo seizmografov a mapy oblasti zisti, kde bolo epicentrum zemetrasenia.

Na úvod by som sa chcel ospravedlniť za chybu v zadaní. Priložená mapa mala príliš malú mierku a epicentrum sa na mape nenachádzalo. Nebolo teda možné zistiť jeho presnú pozíciu. Zohľadnil som to aj v bodovaní.

Zo seizmografov môžeme s istotou zistiť len čas, ktorý ubehol od príchodu P-vlny po príchod S-vlny. Podľa veľkosti výkyvov nemôžeme odhadnúť vzdialenosť danej stanice od epicentra, lebo seizmografy majú rôznu citlivosť. Tiež nemôžeme predpokladať, že čas 0 na grafoch zodpovedá času, kedy nastalo zemetrasenie, lebo potom by nám pre P-vlny a S-vlny vyšla rôzna vzdialenosť. Čo však vieme určiť je, ktorá vlna je S-vlna a ktorá je P-vlna, podľa výrazne väčších výkyvov v grafoch. P-vlna je rýchlejšia, preto dorazila do staníc skôr. Prvý veľký výkyv teda znamená prechod P-vlny a druhý prechod S-vlny. Takto vieme odčítať časový rozdiel medzi nimi.

Nazvime si čas šírenia P-vlny od epicentra po seizmografickú stanicu t_{P} a čas šírenia S-vlny od epicentra po stanicu t_{S}. Vieme, že pre obe vlny je vzdialenosť od epicentra po stanicu rovnaká a že obe vlny vznikli v rovnakom čase. Potom podľa vzorca $s = v \cdot t$ platí:

$$s_{\mathrm{p}} = s_{\mathrm{s}}$$

$$v_{\mathrm{p}} \cdot t_{\mathrm{p}} = v_{\mathrm{s}} \cdot t_{\mathrm{s}}$$

s_{p} a s_{s} je vzdialenosť stanice od epicentra, v_{p} je rýchlosť P-vlny a v_{s} je rýchlosť S-vlny. Keďže však „vyštartovali“ v tom istom momente a poznáme ich rozdiel, vieme povedať:

$$t_{\mathrm{s}} = t_{\mathrm{p}} + t_{\mathrm{rozdiel}}$$

Toto dosadíme do prvej rovnice:

$$v_{\mathrm{p}} \cdot t_{\mathrm{p}} = v_{\mathrm{s}} \cdot (t_{\mathrm{p}} + t_{\mathrm{rozdiel}})$$

$$v_{\mathrm{p}} \cdot t_{\mathrm{p}} = v_{\mathrm{s}} \cdot t_{\mathrm{p}} + v_{\mathrm{s}} \cdot t_{\mathrm{rozdiel}}$$

$$v_{\mathrm{p}} \cdot t_{\mathrm{p}} - v_{\mathrm{s}} \cdot t_{\mathrm{p}} = v_{\mathrm{s}} \cdot t_{\mathrm{rozdiel}}$$

$$t_{\mathrm{p}} \cdot (v_{\mathrm{p}} - v_{\mathrm{s}}) = v_{\mathrm{s}} \cdot t_{\mathrm{rozdiel}}$$

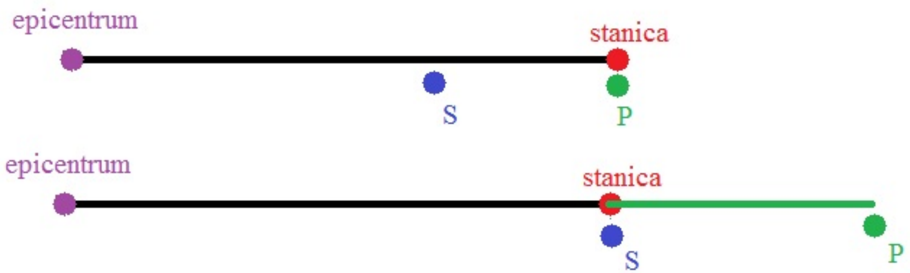
$$t_{\mathrm{p}} = \frac{v_{\mathrm{s}} \cdot t_{\mathrm{rozdiel}}}{v_{\mathrm{p}} - v_{\mathrm{s}}}$$

Zistili sme čas šírenia P-vlny od epicentra po stanicu. Teraz nám ho stačí vynásobiť rýchlosťou P-vlny, a dostaneme vzdialenosť epicentra od stanice:

$$s = v_{\mathrm{p}} \cdot t_{\mathrm{p}}$$

$$s = \frac{t_{\mathrm{rozdiel}} \cdot v_{\mathrm{s}} \cdot v_{\mathrm{p}}}{v_{\mathrm{p}} - v_{\mathrm{s}}}$$

Postupovať môžme aj inak, a to keď si uvedomíme, že vzdialenosť medzi vlnami rovnomerne narastá. Keď od oboch rýchlostí odčítame rýchlosť S-vlny, bude S-vlna stáť(má rýchlosť $v_{\mathrm{s}} - v_{\mathrm{s}} = 0)aP - vlnasaodnejbudevzaovarchlosou \mathrm{v}_{\mathrm{p}} - v_{\mathrm{s}}$. Takže celkový čas šírenia vĺn môžeme vypočítať pomocou ich vzájomnej vzdialenosti, $t = \frac{s_{\mathrm{rozdiel}}}{v_{\mathrm{p}} - v_{\mathrm{s}}}$.



Prvá situácia na obrázku znázorňuje moment, keď stanica zachytila prechod P-vlny a druhá znázorňuje prechod S-vlny. Medzi nimi ubehol čas t_{rozdiel} a je zjavné, že za tento čas ich vzájomnú vzdialenosť prešla P-vlna. Vieme ju teda vypočítať ako súčin toho času a rýchlosti P-vlny.

$$s_{\mathrm{rozdiel}} = t_{\mathrm{rozdiel}} \cdot v_{\mathrm{p}}$$

Potom celkový čas šírenia je:

$$t_{\mathrm{s}} = \frac{t_{\mathrm{rozdiel}} \cdot v_{\mathrm{p}}}{v_{\mathrm{p}} - v_{\mathrm{s}}}$$

Keď teraz chceme zistiť dráhu, ktorú S-vlna prešla od epicentra po stanicu, skrátka čas jej šírenia vynásobíme jej rýchlosťou.

$$s = t_{\mathrm{s}} \cdot v_{\mathrm{s}} = \frac{t_{\mathrm{rozdiel}} \cdot v_{\mathrm{p}} \cdot v_{\mathrm{s}}}{v_{\mathrm{p}} - v_{\mathrm{s}}}$$

Oboma spôsobmi sme dostali ten istý výsledok. Teraz nám už stačí len dosadiť správne hodnoty za rýchlosti jednotlivých vĺn a zmeny časov odčítané z grafov. Pre jednotlivé mestá je to:

$$t_{\mathrm{rozdiel}} = 62\,\mathrm{s},\, s_{\mathrm{Budapešť}} \doteq 470{,}167\,\mathrm{km}$$

$$t_{\mathrm{rozdiel}} = 50\,\mathrm{s},\, s_{\mathrm{Bratislava}} \doteq 379{,}167\,\mathrm{km}$$

$$t_{\mathrm{rozdiel}} = 66\,\mathrm{s},\, s_{\mathrm{Viedeň}} \doteq 500{,}5\,\mathrm{km}$$

Aby sme našli epicentrum aj na mape, potrebujeme všetky vzdialenosti premeniť na centimetre na mape podľa mierky mapy. Po vytlačení moja mapa mala mierku $1{,}6\,\mathrm{cm}$:

50 km, ale rôzne vytlačené mapy mohli mať rôznu mierku. Po premenení do mojej mierky sú vzdialenosti nasledovné:

$$s_{\text{Budapešť}} \doteq 15{,}0\,\text{cm}$$
$$s_{\text{Bratislava}} \doteq 12{,}1\,\text{cm}$$
$$s_{\text{Viedeň}} \doteq 16{,}0\,\text{cm}$$

Epicentrum teraz nájdeme skrátka tak, že si urobíme pre každú stanicu kružnicu so stredom v danej stanici a polomerom rovným vzdialenosti, ktorú na mape má epicentrum od stanice.

Bodovanie: $0{,}5\ b$ *za nápad rysovať kružnice,* $1\ b$ *za správne odčítanie času z grafov a* $3{,}5\ b$ *za správne spočítanie vzdialenosti staníc od epicentra. Za čiastočne spočítané vzdialenosti som dával čiastočné body, napríklad za spočítanie vzdialenosti medzi vlnami namiesto celkovej vzdialenosti som dával* $1{,}5\ b$.

Úloha 6: Pomaly ale isto - *opravoval Šimon Pajger – Legolas*

Vodná elektráreň Čierny váh je tzv. prečerpávacia vodná elektráreň. Pozostáva z dvoch vodných nádrží – jednej položenej vysoko – na kopci, druhej pod kopcom, na toku rieky. Ak je v elektrickej sieti nadbytočná energia, minie ju elektráreň na prečerpanie vody z dolnej nádrže do hornej. Spád vody z dolnej nádrže do turbíny je $7m$. Horná nádrž tejto elektrárne má objem $3{,}7$ milióna m^3 vody a je položená $427m$ nad hladinou dolnej nádrže. **Ako dlho by trvalo naplniť (pôvodne prázdnu) hornú nádrž, ak by sme na poháňanie čerpadla aj napĺňanie samotnej nádrže použili iba pritekajúcu vodu z rieky, ktorá má priemerný prietok $62m^3/s$?**

Na to aby sme vodu dostali hore, musí jej čerpadlo dodať nejakú energiu. Koľko musí byť tejto energie? Vieme to zistiť z toho, o koľko vzrástla potenciálna energia vypumpovanej vody.

$$E_{\text{p}} = m \cdot g \cdot h = \rho \cdot V_{\text{N}} \cdot g \cdot h_{\text{N}}$$

Kde V_{N} je objem hornej nádrže ($3{,}7$ milióna m^3) a h_{N} je jej výška oproti spodnej ($427m$).

Túto energiu musíme získať tým, že pustíme nejakú pritekajúcu vodu dole do turbín. Otázka znie koľko (aký objem) jej tam musím pustiť. Označím si objem vody, ktorý ide turbínami ako V_{T}, potom energia ktorú takto získame je (opäť zo vzorca na potenciálnu energiu):

$$E_{\text{z}} = m \cdot g \cdot h = \rho \cdot V_{\text{T}} \cdot g \cdot h_{\text{T}}$$

Kde h_{T} je výška spádu vody do turbíny ($7m$).

A ako som už povedal, energia získaná z turbín musí byť rovnaká ako energia, ktorú dodá čerpadlo prečerpávanej vode

$$\rho \cdot V_{\text{N}} \cdot g \cdot h_{\text{N}} = \rho \cdot V_{\text{T}} \cdot g \cdot h_{\text{T}}$$

vidím, že ρ a g sú na oboch stranách, takže nimi celú rovnicu vydelím

$$V_{\text{N}} \cdot h_{\text{N}} = V_{\text{T}} \cdot h_{\text{T}}$$

Jediná neznáma v rovnici je teraz V_T, takže si ju osamostatníme - vydelíme rovnicu h_T

$$V_\mathsf{T} = V_\mathsf{N}\frac{h_\mathsf{N}}{h_\mathsf{T}}$$

(veľa z Vás to zvládlo aj logickým uvažovaním alebo trojčlenkou)

Takže už máme objem vody, ktorý musí ísť do turbín, no nesmieme zabúdať na vodu, ktorú vyčerpáme hore. Keď tieto dva objemy sčítam, dostanem celkový objem vody ktorý potrebujem.

No a keď už mám celkový objem, čas zistím jednoducho tak, že tento objem vydelím prietokom.

$$t = \frac{V}{Q}$$

$$t = \frac{V_\mathsf{N}\frac{h_\mathsf{N}}{h_\mathsf{T}} + V_\mathsf{N}}{Q}$$

môžeme dosadiť konkrétne čísla

$$t = \frac{3700000\,\mathsf{m}^3\,\frac{427\,\mathsf{m}}{7\,\mathsf{m}} + 3700000 m^3}{62\,\mathsf{m}^3/\,\mathsf{s}} = 3700000\,\mathsf{s}$$

To je skoro 43 dní.

Bodovanie: *Za spočítanie, koľko potenciálnej energie treba dodať vode, aby sa dostala do hornej nádrže* $1{,}5\ b$. *Za zistenie, koľko energie dostanem keď pustím nejaký objem vody do turbíny* $1\ b$*, za následné spočítanie, koľko vody tam teda musím pustiť* $1\ b$ *(tieto 2 kroky ste často rôzne spájali do jedného, ten som pochopiteľne hodnotil* $2\ b$*). Za uvedomenie si, že nesmiem zabudnúť na vodu, ktorá ide hore* $0{,}5\ b$. *A za následné dopočítanie času* $1\ b$.

Úloha 7: Hlad - *opravoval Jonáš Dujava*

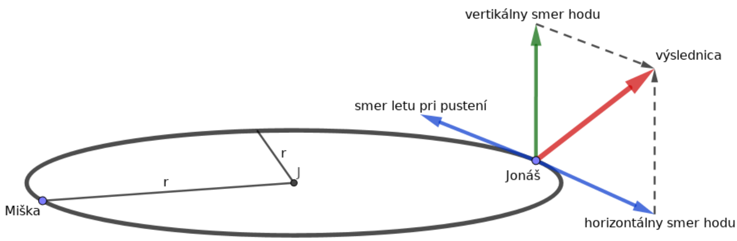
Miška a Jonáš sa točia na vodorovnej centrifúge (so zvislou osou rotácie) rýchlosťou 40 otáčok za minútu. Keďže je Miška hladná, Jonáš jej chce venovať horalku. Na Mišku bohužiaľ nedosiahne, pretože sedia na opačných stranách centrifúgy (presne oproti - 4 metre od seba). **Akou veľkou rýchlosťou má Jonáš hodiť horalku, aby letela zvislo nahor a naspäť spadla presne po takom čase, aby ju Miška chytila?**

V každej úlohe je dôležité sa zamyslieť a získať intuíciu ohľadom toho, ako by sa daný systém mal správať. V našom prípade sú to pohyby, respektíve rýchlosti.

Každý objekt s nenulovou rýchlosťou a neprítomnosťou pôsobiacich síl by sa hýbal priamočiaro po priamke. Vonkajšie sily dokážu ovplyvňovať tento pohyb, či už meniť smer alebo rýchlosť.

V našom prípade máme Mišku a Jonáša, ktorý sa točia na centrifúge. Keby medzi centrifúgou a nimi nepôsobili žiadne sily, jednoducho by sa pohybovali rovno po priamke v smere doterajšieho pohybu a zošmykli by sa z centrifúgy. No tomu zabraňuje dostredivá sila(centrifúgu tvorí pevná látka - silové pôsobenie molekúl, ktoré ju držia pokope + sedia na nej, takže pôsobí trenie, ktoré ich drží na mieste), takže sa hýbu po kružnici.

To isté platí pre horalku, pokým ju Jonáš drží, tak sa hýbe spolu s ním po kružnici, ale keď ju pustí, tak bude pokračovať ďalej vo svojom pohybe a odletí po dotyčnici, ako je naznačené na obrázku.



Obr. 1: Podhľad zboku (chceme, aby horalka letela smerom verikálneho hodu)

Takže keď už máme základnú intuíciu, môžeme sa pustiť do úlohy. Chce od nás, aby po vyhodení horalka letela priamo nahor, a dopadla v takom čase, kedy bude pod ňou Miška, aby ju mohla chytiť.

Rýchlosť horalky si môžeme rozložiť do 2 zložiek:

a) **Horizontálna zložka** - chceme, aby bola nulová(ináč by letela aj do strany) - $v_{\mathrm{h}} = 0$

b) **Vertikálna zložka** - chceme, aby bola tak veľká, aby dopadla v správny čas - $v_{\mathrm{v}} \neq 0$

Vieme, že kým Jonáš horalku drží, horalka sa vzhľadom na zem hýbe obvodovou rýchlosťou v_{o}. Keďže chceme, aby horalka mala po odhodení nulovú horizontálnu rýchlosť, musí ju Jonáš hodiť presne rovnakou rýchlosťou opačným smerom, takže sa tieto rýchlosti navzájom vynulujú. Takže platí

$$v_{\mathrm{hH}} = -v_{\mathrm{o}}$$

kde v_{hH} je horizontálna zložka rýchlosti hodu.

Rýchlosť, akou sa točí centrifúga, vieme zistiť z jej rozmerov a frekvencie otáčania.

Obvod:

$$o = 2\pi r = 2\pi \cdot 2\,\mathrm{m} = 4\pi\,\mathrm{m}$$

Obvodová rýchlosť:

$$v_{\mathrm{o}} = \frac{s}{t} = \frac{40o}{60s} = \frac{40 \cdot 4\pi\,\mathrm{m}}{60s} = \frac{8}{3}\pi\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Týmto máme vyriešené, akou rýchlosťou musíme hodiť horalku v horizontálnom smere.

Čo sa týka vertikálnej zložky, tú nám počas celého letu pôsobí na ňu gravitačné pôsobenie, čiže nám ju zrýchľuje smerom nadol. Keď si predstavíme objekt vo výške a pustíme ho, tak za $1s$ naberie rýchlosť $v = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Hodnota gravitačného zrýchlenia je teda $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Platí, že pôvodne nehybný objekt nachádzajúci sa v blízkosti povrchu Zeme, na ktorého nepôsobia iné sily ako gravitačná, po čase t nadobudne rýchlosť

$$v = -gt$$

Ak objekt mal počiatočnú rýchlosť v_0, tak sa k tejto výslednej pripočíta:

$$v = v_0 - gt$$

Takže ak vyhodíme objekt smerom nahor(tzn. s kladnou rýchlosťou), časom ho gravitačné zrýchlenie spomaľuje, až kým rýchlosť klesne na nulu a potom do záporných hodnôt, čiže objekt začne padať naspäť. V rovnakých výškach je rýchlosť letu rovnaká, aj čas letu nahor je rovnaký ako čas pádu.

V našom prípade chytáme horalku v rovnakej výške, takže jej veľkosti rýchlosti sú rovnaké, len smer je opačný. Takže platí:

$$-v_{\mathrm{vH}} = v_{\mathrm{vH}} - gt$$

$$2v_{\mathrm{vH}} = gt$$

$$v_{\mathrm{vH}} = \frac{gt}{2}$$

Získali sme vzorec, ktorým vieme zistiť, akou vertikálnou rýchlosťou v_{vH} musíme horalku vyhodiť, aby jej let trval t času.

Keďže Miška sedí oproti Jonášovi, tak aby chytila horalku, musí za tento čas spraviť pol kolečka, alebo hocikoľko celých koliečok a jedno polkoliečko. Keďže centrifúga sa točí s frekvenciou $\frac{40ot}{\mathrm{min}}$ čo je $\frac{1ot}{1{,}5\,\mathrm{s}}$, tak všetky možné časy, kedy môže chytiť horalku sú

$$t = 0{,}75\,\mathrm{s} + n \cdot 1{,}5\,\mathrm{s}$$

kde n je celé číslo.

Máme spôsob, ako si vypočítať veľkosti jednotlivých zložiek rýchlosti hodu. Keďže sú na seba kolmé, môžeme ich pomocou Pytagorovej vety spočítať dokopy:

$$v_{\mathrm{H}} = \sqrt{v_{\mathrm{hH}}^2 + v_{\mathrm{vH}}^2}$$

$$v_{\mathrm{H}} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\pi\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \left(\frac{gt}{2}\right)^2}$$

Môžeme si to vyčísliť, keď by Miška chytala horalku hneď po prvej polotočke:

$$v_{\mathrm{H}} \approx 9{,}15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Týmto spôsobom môžeme zistiť všetky možné riešenia.

Bodovanie: *Za zistenie aspoň jedného času, kedy mohla Miška chytiť horalku* $1\ b$*. Za vysvetlenie a výpočet vertikálnej zložky rýchlosti* $2\ b$ *a za vysvetlenie a výpočet horizontálnej zložky rýchlosti* $1{,}5\ b$*. Za sčítanie týchto zložiek do výslednej rýchlosti* $0{,}5\ b$*. Za nedostatky vo vysvetľovaní som sťahoval* $0{,}5\ b$*.*