Vzorové riešenia 3. série zimnej časti

Úloha 1: zdRAWá stRAWa - *opravovala Tereza Prokopová*
Hustota surových jabĺk je $825\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Po usušení majú len 50% pôvodného objemu. Ich hmotnosť sa znížila o 80%. **Aká bola hustota jablkovej sušiny?**

Urobme si najskôr slušný zápis. Paviel nám prezradil, že hustota čerstvých jabĺčok je $825\frac{kg}{m^3}$. Vieme, že hustota nám označuje hmotnosť jabĺčok natlačených v danom objeme, teda $\rho_\mathrm{J} = \frac{m_\mathrm{J}}{V_\mathrm{J}}$. Hmotnosť čerstvých jabĺčok sme označili m_J a ich objem V_J.

Po dvoch týždňoch Paviel zistil, že objem jablkovej sušiny má už len 50% pôvodného objemu čerstvých jabĺčok, čo znamená, že má polovicu z V_J. Objem jablkovej sušiny je:

$$V_\mathrm{S} = V_\mathrm{J} \cdot 0{,}5$$

Ďalšie si Paviel na usušených jabĺčkach všimol, že sa ich hmotnosť zmenšila o 80%. To znamená, že sušina má $100\% - 80\% = 20\%$ z pôvodnej hmotnosti čerstvých jabĺčok. Hmotnosť usušených jabĺčok môžeme tým pádom zapísať ako

$$m_\mathrm{S} = \frac{m_\mathrm{J} \cdot 20}{100} = m_\mathrm{J} \cdot 0{,}2$$

Hľadanú hustotu môžeme zapísať ako

$$\rho_\mathrm{S} = \frac{m_\mathrm{S}}{V_\mathrm{S}}$$

a dosadíme zistené m_S a V_V.

$$\rho_\mathrm{S} = \frac{m_\mathrm{J} \cdot 0{,}2}{V_\mathrm{J} \cdot 0{,}5} = \frac{m_\mathrm{J}}{V_\mathrm{J}} \cdot \frac{0{,}2}{0{,}5}$$

Všimnime si, že $\frac{m_\mathrm{J}}{V_\mathrm{J}}$ je hustota čerstvých jabĺčok. Naša hľadaná hustota sušiny je

$$\rho_\mathrm{S} = 825 \cdot \frac{0{,}2}{0{,}5} = 825 \cdot 0{,}4 = 330\frac{kg}{m^3}$$

Bodovanie: *Väčšina z vás mala správny postup, no miesto s 20% ste rátali s 80%, za čo som strhávala $0{,}5\ b$. Nedokončené riešenia dostali body podľa toho, ako ďaleko sa dostali.*

Úloha 2: Časové pásma - *opravoval Ján Jurica*
Boogie letel lietadlom medzi dvoma mestami na rovníku z východu na západ. Let mu trval 11 h, ale keď odlietal, hodiny na letisku ukazovali 15:00 miestneho času, no keď pristával, hodiny v mieste pristátia ukazovali len 20:00 hodín miestneho času (stále v ten istý deň). Obvod Zeme okolo rovníka je 40000 km.
Akou priemernou rýchlosťou letelo lietadlo?

Tento príklad sa možno zdal na prvý pohlaď ťažký, ale po chvíli zamyslenia sa dal úplne jednoducho spočítať. Tak sa teda do toho pusťme!

Prvá vec ktorú musíme zistiť je to, koľko Boogie v lietadle preletel. Vieme, že odštartoval o 15:00 a prílet mal o 20:00 večer miestneho času. Z tohto údaju vieme, že letel z východu na západ a taktiež ak odpočítame $20:00 - 15:00 = 5$ zistíme, že rozdiel medzi časmi odletu je **5 hodín** . Zo zadania viem, že odlietal zo stredu časového pásma, takže približne po prvej pol hodine (26 min) opustil časovú zónu z ktorej lietadlo odlietalo a rovnako približne pol hodinu pred pristaním vletelo do časovej zóny v ktorej aj pristál. Z tohto vyplýva, že preletel cez **6 časových zón** .

Keďže budeme považovať Zem za dokonalú guľu s obvodom **40000** km a predpokladať, že každá časová zóna ma rovnakú šírku v jej najširšom mieste, môžeme si zemeguľu rozdeliť na 24 rovnakých časových pasiem. Ak vydelíme obvod počtom časových zón zistíme koľko kilometrov pripadá na jednu zónu a keďže vieme že preletel cez **6** týchto zón, vynásobíme toto číslo šiestimi

$$\frac{40000}{24} \cdot 6 = 10000\,\text{km}$$

Práve sme zistili, akú vzdialenosť Boogie v lietadle prešiel. Teraz už použijeme všetkým známy vzorec na výpočet rýchlosti:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{10000\,\text{km}}{11\,\text{h}} \doteq 909{,}1\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

A zistíme, že lietadlo letelo priemernou rýchlosťou $909{,}1\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Bodovanie: *Za nesprávne zistenie počtu časových pásiem z čoho vznikol aj chybný výsledok som odpočítaval $2\ b$; za malé nepresnosti som strhol $1\ b$; Ak bol príklad vypočítaný zle a postup bol tiež nesprávny dostali ste $0\ b$*

Úloha 3: Kto je hustejší? - *opravoval Matej Novota – Krtko*
Zostav si doma vlastný hustomer a odmeraj, hustoty týchto tekutín: ocot, mlieko a olej. Ktorá z nich je najhustejšia?

Úlohou bolo zostrojiť hustomer, teda prístroj na meranie hustoty. Najčastejšie je tento prístroj dlhá palička, ktorá pláva zvislo v kvapaline, ktorej hustotu meria. Podľa hustoty kvapaliny sa hustomer ponorí o určitú vzdialenosť.

Ako však takýto ponorný hustomer funguje?

Vďaka Archimedovmu zákonu vieme, že vztlaková sila, ktorá nadľahčuje náš hustomer sa rovná tiažovej sile, ktorá ťahá náš hustomer ku dnu.

$$F_{vz} = F_g$$

čo po rozpísaní vyzerá takto:

$$\rho_k Shg = mg$$

Teda hustota kvapaliny krát plocha podstavy nášho valcovitého hustomeru krát hĺbka ponoru krát tiažové zrýchlenie sa rovná hmotnosti hustomeru vynásobenej tiažovým zrýchlením.

$$\rho_k = \frac{m}{Sh}$$

Z čoho po úprave vieme, že hustota kvapaliny sa rovná hmotnosti hustomeru vydelenej podstavou válca a hĺbka ponoru.

No a keďže jediná vec, ktorá sa mení je hĺbka ponoru, tak to je práve to čo na hustomere musíme merať.

Ako zostrojiť hustomer?

Potrebujeme podlhovastý pomerne úzky[1] válec, napríklad slamku. Potom treba slamku na spodku zaťažiť tak, aby slamka plávala v kvapaline zvislo. Dá sa použiť čokoľvek[2] s dostatočnou hustotou ale netreba to zasa prehnať, aby sa celá slamka neponorila. No a ešte treba zapchať oba konce slamky, aby do vnútra nevtiekla kvapalina, napríklad taviacou pištoľou alebo plastelínou.

Ako nakalibrovať hustomer?

Treba ho ponoriť do vody a zaznamenať výšku. Potom každá ďalšia hustota, ktorú budeme merať sa rovná hustote vody vynásobenej hĺbkou ponoru pri vode vydelenej aktuálnou hĺbkou ponoru.

$$\rho_k = \frac{\rho_{voda} h_{voda}}{h_k}$$

A teraz samotné meranie

Zostrojený hustomer ponoríme do jednotlivých kvapalín: mlieka, octu a oleja. Pre kontrolu treba meranie vždy aspoň tri krát opakovať. Ja som si spravil rovno tri hustomery. A mali by nám vyjsť takéto hodnoty, teda aspoň mne vyšli :D

farba	voda		mlieko		ocot		olej	
hustomeru	$h\ [cm]$	$\rho\ [\frac{kg}{m^3}]$	$h\ [cm]$	$\rho\ [\frac{kg}{m^3}]$	$h\ [cm]$	$\rho\ [\frac{kg}{m^3}]$	$h\ [cm]$	$\rho\ [\frac{kg}{m^3}]$
zelená	7,5	1000	7,4	1013,51	7,4	1013,51	8,6	872,09
červená	8,9	1000	8,8	1011,36	8,7	1022,99	10,2	872,55
modrá	7,1	1000	7,0	1014,29	7,0	1014,29	8,1	876,54
	priemer	1000	priemer	1013,05	priemer	1016,93	priemer	873,73

Na záver si zhrnieme výsledky

Olej je jednoznačne najmenej hustý, či už ste použili repkový ako ja alebo iný. Zato ocot a mlieko sú si naozaj blízko. Mne vyšiel ocot o trošku hustejší, ale uznával som aj keď vám vyšlo hustejšie mlieko. Pretože nie každé mlieko má rovnakú hustotu, napríklad ja som použil polotučné ale pri plnotučnom to mohlo vychádzať inak. A aj octy môžu byť rôzne ja som mal 8% roztok.

Bodovanie: *Ak ste opísali ako ste merali a ako hustomer funguje mohli ste získať $2\ b$ a za určenie najhustejšej látky a vyčíslenie jednotlivých hustôt ste mohli dostať až ďalšie $2\ b$. No*

[1] aby bol presný

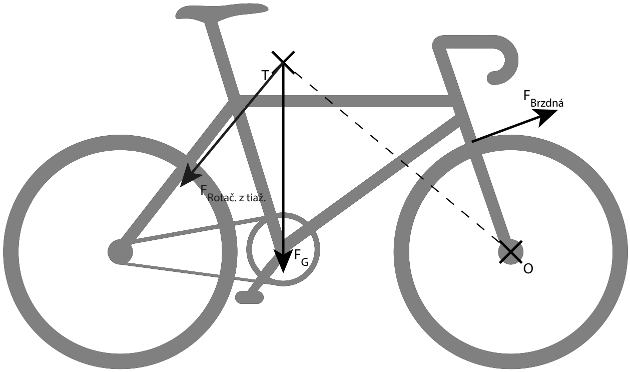
[2] piesok, kamienky, matičky, klinčeky, cín, ...

a za opakovanie merania ste mohli získať posledný $1\ b$.

Úloha 4: Neopatrný turista - *opravoval Patrik Drozdík*
Jakub si to šinul na bicykli dolu kopcom, znenazdajky mu do cesty vkročil Matej. Nechcel ho zraziť, no bál sa, že keď prudko zabrzdí, tak spadne. **Má brzdiť prednou, zadnou alebo oboma brzdami? Čo sa stane v jednotlivých prípadoch?**

Na úvod treba spomenúť, že tento príklad ste si mohli pokojne zjednodušiť tým, že by ste brzdy aj kolesá považovali za ideálne. To znamená, že ich trenie je akoby nekonečné, a teda keď nimi brzdíme, tak nikdy neprešmykujú.

Brzdenie prednou brzdou



Ako väčšina z vás správne napísala, brzdenie prednou brzdou môže skončiť škaredým pádom. Prečo je však tomu tak? Uvažujme najprv ideálnu brzdu aj koleso, teda také, ktoré neprešmykujú. V takomto prípade keď zabrzdíme predné koleso, nám bude v mieste brzdy pôsobiť brzdná sila. Tá sa bude snažiť rám bicykla otočiť okolo predného kolesa. Proti tejto sile pôsobí svojimi rotačnými účinkami tiažová sila. Keďže cyklista ide dolu kopcom, môžeme predpokladať že rotačné účinky tiažovej sily budú slabšie ako brzdná sila. Bicykel aj s jazdcom sa teda okolo stredu predného kolesa bude otáčať až kým sa neoprie o zem pred ním, čo v praxi znamená nepríjemný pád. **Ak brzdy považujeme za ideálne, predným kolesom brzdiť nesmieme.**

Ak však brzda nie je ideálna, resp. brzdíme ňou čiastočne, môžeme udržiavať brzdnú silu v rovnováhe s rotačnými účinkami tiažovej sily. V takom prípade vieme brzdiť tak, že zadné koleso sa síce bude čiastočne nadvihovať, ale bicykel sa dopredu neprevráti. Navyše to znamená, že tlaková sila do podložky, ktorá sa predtým rozkladala medzi zadné a predné koleso teraz bude pôsobiť len na prednom kolese, takže bude väčšia. To umožní neideálnemu prednému kolesu brzdiť silnejšie bez prešmykovania. **Ak teda brzdíme vhodnou silou, môže byť brzdenie predným kolesom účinnejšie.**

Brzdenie zadnou brzdou

Pri brzdení zadnou brzdou tiež pôsobí brzdná sila. Ako os rotácie sa ale tentokrát bude správať os zadného kolesa. Či už uvažujeme ideálne koleso (trenie medzi ním a podložkou je nekonečné - koleso neprešmykuje) alebo koleso (či brzdu), ktoré čiastočne prešmykuje, bude nám tu pôsobiť okrem brzdnej sily aj tiažová sila, obe ale v tomto prípade budú pritláčať predné koleso do podložky, čo nám rozhodne nevadí, keďže stabilitu bicykla to neohrozí. **Brzdenie zadnou brzdou je bezpečné, bicykel sa neprevráti.**

Pohľadom hlbšie do problematiky však zisťujeme, že tlaková sila do podložky bude na zadnom kolese menšia ako v prípade, keď brzdíme prednou brzdou vhodnou silou. To znamená, že koleso môže začať prešmykovať už pri menšej brzdnej sile, **takže takéto brzdenie môže byť menej efektívne.**

Brzdenie oboma brzdami

Pri ideálnych brzdách použitých naplno nie je rozdiel medzi takýmto brzdením a brzdením len prednou brzdou, pretože ako som pri ňom spomenul, zadné koleso pri rotácii okolo predného stráca kontakt so zemou, a teda nebudú na ňom pôsobiť žiadne sily. Keby sme chceli brzdiť tak, aby malo zadné koleso stále aspoň nejaký kontakt so zemou, situácia by už bola značne komplikovanejšia, keďže by sme museli počítať o koľko je tlaková sila na zadnom kolese menšia v dôsledku rotácie okolo predného. Tá je však ovplyvnená prítlakom predného kolesa, ktorý je zas ovplyvnený silou brzdenia zadným. Prípady kedy brzdíme len čiastočne ste však našťastie nemuseli počítať.

V praxi sa takéto brzdenie ale častokrát využíva tak, že prednou brzdou sa brzdí do tej miery, aby sa bicykel priveľmi nezdvíhal a zadnou brzdou sa brzdí natoľko, aby sa zadné koleso nedostalo do šmyku. Okrem vhodnej sily brzdenia sa ešte jazdec na bicykli môže nahnúť tak, aby posunul ťažisko čo najviac dozadu, čo mu umožní brzdiť silnejšie.

Bodovanie: *Za dostatočný popis dejov pri niektorom spôsobe brzdenia som udeľoval $2\ b$; po $1{,}5\ b$ ste mohli získať za dostatočné odôvodnenie v čom sa ďalšie spôsoby líšia či za presný popis. Správny mohol byť ktorýkoľvek zo spôsobov brzdenia pokiaľ bol dostatočne odôvodenený. Za nedostatočné popisy bolo možné získať časť bodov, za dobré myšlienky ktoré vás ale nedoviedli ku kompletnému riešeniu ste mohli získať po maximálne $2\ b$. Riešenia bez akéhokoľvek zdôvodnenia so správnymi závermi mohli dostať maximálne $1\ b$.*

Úloha 5: Biliardová - *opravovala Monika Machalová – Trim*

Hanička potrebovala trafiť červenú guľu do diery bez toho, aby trafila čiernu. Rozhodla sa, že červenú potopí súperovou fialovou, teda tak, že bielou ťukne fialovú a tá trafí červenú do diery. **Pomôž Haničke vymyslieť, kam má mieriť, aby sa jej to podarilo.**

Čo je dôležité si v tejto úlohe uvedomiť? Biliardové gule sa správajú ako svetlo, a teda pre nich platí, že uhol dopadu $=$ uhol odrazu. To znamená, že keď príde guľa k mantinelu pod uhlom napríklad 70°, odrazí sa tiež pod uhlom 70° preč.

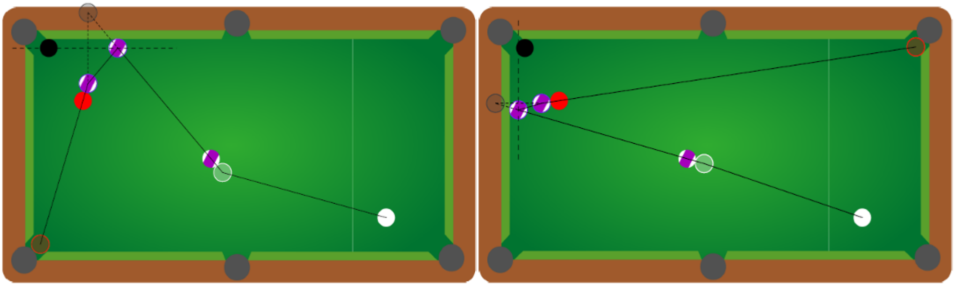
Keď sa mi zrazia dve gule, budú sa dotýkať iba v jednom bode. Práve v tomto bode príde k prenosu energie z jednej na druhú. Je to, akoby prvá guľa narazila na stenu, ktorá je presne takto naklonená. Odrazí sa tiež ako od steny, v rovnakom uhle ako prišla. A čo druhá guľa, ktorá bola odrazená? Tá pôjde smerom, ktorým dostala najviac energie, teda smerom od bodu stretnutia. To je ten istý smer, akoby som urobila spojnicu ich ťažísk a predĺžila ju.

Ako teraz zistím, kam mám teda mieriť? Pôjdem odzadu. Najprv si spojím priamkou stred červenej a dieru, do ktorej ju chcem trafiť. Už viem, že spojenie ťažiska a bodu dotyku mi určuje smer. Smerom naspäť mi preto bude smer cez ťažisko určovať bod dotyku. Fialová guľa teda musí naraziť do červenej v mieste, kde sa čiara spájajúca červenú a dieru pretína s jej vzdialenejším okrajom.

Fialová sa pred nárazom do červenej potrebuje odraziť od steny. Uhol dopadu a odrazu bude rovnaký, spravím si teda veľký trojuholník, aby som zistila, v ktorom bode sa musí dotknúť steny. Musím tam započítať aj to, že guľa má nejaký polomer, lebo steny sa dotýka svojou stranou, nie stredom.

Keď už viem, odkiaľ prišla fialová, rovnakým spôsobom viem zistiť, kam ju musela trafiť biela, a teda kam musí Hanička mieriť.

Táto úloha mohla mať veľa správnych riešení, tu sú dve najjednoduchšie:



Bodovanie: $1\ b$ *za obrázok možného riešenia,* $2\ b$ *za vysvetlenie zákonu odrážania,* $2\ b$ *za správne odrážanie gúľ navzájom.*

Úloha 6: V parku o polnoci - *opravoval Bohdan Jóža – Boďo*
Boďo a Jonáš si dali závod tanku a autíčka na diaľkové ovládanie. Svoje vozidlá postavili vedľa seba presne do stredu preklápacej hojdačky tak. Počas závodu si všimli zaujímavú vec: Hojdačka ostala celý čas v rovnováhe. **Aká je hmotnosť tanku?** Hmotnosť športiaku je $m_{\text{š}}$, rýchlosť tanku je v_{t} a rýchlosť športiaku $v_{\text{š}}$.

Keďže nemáme zadané konkrétne čísla, ale len nejaké fyzikálne veličiny, ktoré poznáme, musíme si hmotnosť tanku vyjadriť pomocou nich. Inak povedané, úlohu musíme riešiť všeobecne. Na obe vozidlá počas celého pohybu pôsobí ich tiažová sila. Keďže hojdačka ostala celý čas vyvážená, momenty oboch tiažových síl sa musia v každom momente pohybu rovnať. Platí teda:

$$M_{\text{t}} = M_{\text{š}}$$

$$F_{\text{t}} \cdot r_{\text{t}} = F_{\text{š}} \cdot r_{\text{š}}$$

Teda tiažová sila tanku vynásobená ramenom momentu jej sily, teda vzdialenosti tanku od osi otáčania hojdačky sa musí rovnať tiažovej sile športiaku vynásobenej vzdialenosťou športiaku od osi otáčania hojdačky. Žiadnu z týchto premenných nepoznáme, ale dokážeme si ich vyjadriť. Tiažovú silu si vyjadríme ako hmotnosť krát tiažové zrýchlenie: $F = m \cdot g$ a vzdialenosť v čase t si vyjadríme ako rýchlosť krát čas: $r = s = v \cdot t$. Toto dosadíme do našej pôvodnej rovnice pre obe vozidlá a dostaneme novú rovnicu:

$$m_{\text{t}} \cdot g \cdot v_{\text{t}} \cdot t = m_{\text{š}} \cdot g \cdot v_{\text{š}} \cdot t$$

Tu vidíme, že g a t sú pre obe strany rovnaké, môžeme teda nimi celú rovnicu vydeliť:

$$m_{\text{t}} \cdot v_{\text{t}} = m_{\text{š}} \cdot v_{\text{š}}$$

V tejto rovnici nám ostáva jediná neznáma, práve hmotnosť tanku, ktorú je potrebné vyjadriť. Celú rovnicu predelíme v_{t} rýchlosťou tanku a máme výsledok:

$$m_{\text{t}} = \frac{m_{\text{š}} \cdot v_{\text{š}}}{v_{\text{t}}}$$

Bodovanie: *Použitie rovnosti momentov tiažových síl $2\ b$, vyjadrenie sily a ramena pomocou premenných, ktoré poznáme $2\ b$, správna úprava a správna odpoveď $1\ b$.*

Úloha 7: UFO - *opravoval Kubo Hluško*
Našiel som súčiastku (vážila presne 1 kg), ktorá bola vyrobená z neznámeho materiálu. Tak som ju šupol do rúry na pečenie a začal ju zahrievať. Moja rúra dodávala súčiastke teplo výkonom 2 kW. Teplota súčiastky a jej skupenstvá sa menili tak, ako je zaznačené na obrázku. **Koľko skupenstiev má materiál súčiastky? Pre každé z nich určite, akú má tepelnú kapacitu.**

Najskôr si treba uvedomiť, že keď dodávame teplo s výkonom 2 kW, dodáme 2 kJ tepla za sekundu. A ak toto vynásobíme počtom sekúnd, dostaneme množstvo tepla, ktoré sme dodali za daný čas.

Následne je dôležitý poznatok, že kým nejaké teplo je potrebné na zohrievanie telesa na vyššiu teplotu (teplota telesa sa časom zvyšuje a graf ide šikmo dohora), druhá časť tepla sa minie na skupenskú premenu - ono to nejde len tak bez energie niečo roztaviť a tým pozmeniť väzby medzi molekulami látky. Počas tejto fázy ide do látky teplo, no ona sama sa nezohrieva. To je v grafe vidieť ako časové úseky, kde sa teplota nemení a teda ako úseky vodorovné.

Keď sa zahľadíme na graf, uvidíme že teplota sa nemenila (teda sa menilo skupenstvo) celkovo trikrát. Teda látka prešla troma skupenskými zmenami. Z toho nám plynie, že akokoľvek mimozemsky to znie, látka mala pri nami sledovaných teplotách štyri rôzne skupenstvá, každé s inou tepelnou kapacitou.

Ako vypočítame túto tepelnú kapacitu? Pozrieme sa koľko tepla prijal kilogram látky (teda celé kilogramové teleso) na akú zmenu teploty. Teda, školsky povedané, keď $Q = m \cdot c \cdot \Delta t$, tak $c = \frac{Q}{m \cdot \Delta t}$. Keďže vieme, že $m = 1$ kg a ostatné dva potrebné údaje vyčítame z grafu, skúsme vypočítať prvú tepelnú kapacitu, teda čo sa dialo v čase od 0 do 40 sekúnd:

$$c_1 = \frac{Q_1}{m \cdot \Delta t_1} = \frac{80\,\text{kJ}}{1\,\text{kg} \cdot 40^\circ\,\text{C}} = 2000\frac{\text{J}}{1\,\text{kg} \cdot {}^\circ\text{C}}$$

Obdobným výpočtom pre všetky štyri pozorované skupenstvá dostávame správne hodnoty tepelných kapacít $c_1 = 2000\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot{}^\circ\text{C}}$, $c_2 = 12000\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot{}^\circ\text{C}}$, $c_3 \doteq 2181\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot{}^\circ\text{C}}$ a $c_4 = 4000\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot{}^\circ\text{C}}$

Bodovanie: *Za pochopenie grafu a správne odčítanie údajov $1\ b$, za vysvetlenie čo sa dialo v jednotlivých fázach zohrievania $1\ b$ a nakoniec za správny výpočet všetkých tepelných kapacít $3\ b$.*