Celoslovenský korešpondenčný seminár z fyziky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOFYZ

21. ročník www.pikofyz.sk šk. rok 2018/2019

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti

Úloha 1: Vesmírni opravári - *opravoval Patrik Drozdík*
Prečo bývajú pri opravách astronauti pripevnení k stanici lanom? Čo by sa stalo, keby neboli a odrazili by sa od stanice nohami? Medzinárodná vesmírna stanica sa nachádza na obežnej dráhe Zeme v dosahu jej gravitačného poľa.

Ako ste sa dozvedeli v minulej sérii, ISS si drží svoju obežnú dráhu vďaka udržiavaniu jemnej rovnováhy medzi odstredivou a gravitačnou silou, ktoré na ňu pôsobia. Totiž okrem toho, že zmerať výšku obehu a nastaviť jeho rýchlosť vieme len s nejakou presnosťou, nám život komplikuje aj atmosféra. V tak veľkej výške, v ktorej sa pohybuje ISS, je síce atmosféra omnoho redšia, no stále vesmírnu stanicu pri jej veľmi rýchlom lete trochu spomaľuje (a v takejto výške už nie je zanedbateľná ani slnečná aktivita). Chcem tým povedať, že udržať ISS na obežnej dráhe vyžaduje neustále meranie prístrojmi a upravovanie jej rýchlosti - v tomto grafe `https://www.heavens-above.com/IssHeight.aspx` si môžete pozrieť výšku obehu ISS za posledný rok.

Ale teraz späť k otázke: prečo sú tí astronauti vlastne pripútaní? Jeden z dôvodov je práve to, že ich rýchlosť voči stanici nemusí zostať nulová, keďže sú vonkajšími vplyvmi ovplyvňovaní inak ako stanica (napríklad odpor vzduchu na nich bude určite pôsobiť rozdielne, keďže sú podstatne menší a navyše vzduch okolo stanice bude prúdiť pomerne komplikovane). Takéto „ulietavanie“ od stanice by ale nebolo veľmi rýchle, teoreticky by sa iba občas stačilo ku stanici pritiahnuť bližšie. Väčší problém by však nastal, keby sa astronaut od stanice (omylom) odrazil.

Nepripútanému astronautovi, ktorý sa odrazil od ISS, však stále ostáva ešte jedno eso v rukáve. Je ním SAFER (Simplified Aid For EVA Rescue), čo môžeme preložiť ako zjednodušená pomôcka pre záchranu pri aktivitách mimo vozidlá (EVA znamená Extravehicular Activity, čiže aktivita mimo vozidlo). Táto vychytávka má podobu menšej škatuľky pripevnenej pod tou veľkou krabicou čo majú astronauti pri pohybe mimo stanicu na chrbte (veľká krabica obsahuje systémy na podporu života, ako napríklad chladenie či zásoby vzduchu a vody). SAFER umožňuje astronautovi pomocou trysiek ovplyvňiť svoju rotáciu a pohyb, vďaka čomu sa môže vrátiť naspäť na stanicu. Tento systém je však zamýšľaný ako posledná záchrana v prípade núdze a doposiaľ nebol naostro použitý.

Astronaut, ktorý zostal nepripútaný a nemá ani funkčný SAFER už však len ťažko niečo zmôže sám. Ak nedočiahne na nejakú časť stanice, môže sa už len nechať voľne unášať smerom, ktorým sa odrazil. Ak má pri sebe dostatočne ťažký predmet, môže ho hodiť opačným smerom, ako by chcel ísť. Podľa zákonu akcie a reakcie naňho bude v takom prípade pôsobiť zrýchlenie $a = \frac{F}{m}$ (F je sila, ktorou hodil predmet, m je hmotnosť astronauta). Jeho kolegovia na ISS sa ho môžu pokúsiť chytiť pomocou MSS (Mobile Servicing System), čo je vlastne veľká robotická ruka, avšak šance na úspech takejto záchrannej operácie niesú príliš vysoké.

Pozrime sa ešte z fyzikálneho hľadiska čo sa stane s astronautom, ktorého by sa nepodarilo zachrániť. Ak by sa odrazil smerom priamo k Zemi, postupne by jeho výška od Zeme klesala a rýchlosť narastala stále viac a viac. Pravdepodobne by stratil vedomie v dôsledku nezvládnuteľne veľkého zrýchlenia. Hustejšie vrstvy atmosféry by ho trením zahriali na vyše 1500℃, na čo nie sú stavaní nielen ľudia, ale ani obleky astronautov. Ak by sa odrazil smerom priamo od Zeme, odletel by smerom do voľného vesmíru. Jeho oblek by mu na niekoľko hodín bol schopný udržiavať vhodné životné podmienky, no obsahuje len zásoby vody, nie jedla. Ak by sa odrazil smerom, ktorým sa hýbe ISS (akoby ju chcel pri obiehaní Zeme predbehnúť), odstredivá sila naňho pôsobiaca by prevládla nad gravitačnou, spôsobiac ešte rýchlejší odchod smerom do voľného vesmíru. Pri odraze opačným smerom by nastala opačná situácia - pád smerom k Zemi.

Bodovanie: *Za správne uvedomenie si, že astronauti môžu spadnúť na Zem alebo odletieť do vesmíru s dostatočným odôvodnením $5\ b$. Za nesprávne tvrdenia (napr. „na astronautov nepôsobí gravitácia“ alebo „nebrzdí ich trenie vzduchu lebo tam nie je vzduch“) som strhával po maximálne $2\ b$.*

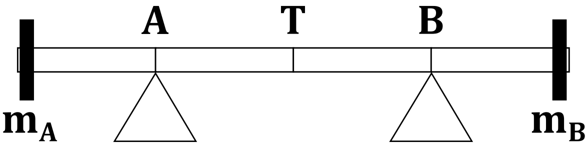
Úloha 2: Posilňujúci Párovčan - *opravoval Martin Lauko – Logik*
Bližšie nešpecifikovaný Párovčan chcel mať na oboch stranách činky po 25 kg. No uvedomil si, že musí kotúče pridávať postupne raz na jeden koniec, raz na druhý koniec tyčky. **Koľko najmenej kotúčov bude potrebovať, aby mu činka nezletela zo stojana?** Tyčka váži 2 kg, jej ťažisko je uprostred, má dĺžku 2 m, podpery na ktorých stojí sú od seba vzdialené 1 m, každá $0{,}5$ m od konca tyčky. Na Párovciach majú samozrejme kotúče ľubovoľných hmotností.

Milí kulturisti! Doteraz bolo správanie sa činiek záhadou, nič sa však nebojte, Pikofyz je tu pre Vás, aby sme všetky záhady objasnili!

Najskôr si povedzme, ako budeme pri riešení postupovať: Posilňujúci Párovčan najskôr dá čo kotúč na ľavú stranu - čo najťažší, ale taký, aby sa činka neprevrhla. Potom pridá kotúč na pravú stranu, opäť čo najťažší. Potom pridá druhý kotúč na ľavú stranu (pôvodný tam nechá a pridá ďalší). Takto bude pokračovať, až kým nedosiahne požadovanú hmotnosť 25 kg na oboch stranách činky.

Takto budeme mať istotu, že nájdeme riešenie s najmenším počtom závaží - ak by sme totiž pridali závažie s väčšou hmotnosťou, činka by sa prevrhla. Opačne pri menšej hmotnosti budeme potrebovať rovnaký alebo väčší počet kotúčov.

Všeobecné riešenie. Najskôr uvažujme všeobecnú situáciu, keď na ľavej strane činky máme závažie s hmotnosť m_{A}, na druhej strane s hmotnosťou m_{B}. Samotná tyč váži $m_0 = 2$ kg. Jej dĺžku označíme $\ell = 2$ m. Tyč je podopretá v 1/4 dĺžky. Povedzme, že poznáme hmotnosť závažia m_{B} a chceme zistiť, aká najväčšia môže byť hmotnosť závažia m_{A}. Tyč bude teda páka s osou otáčania v bode A. Hmotnosť tyče budeme uvažovať v jej ťažisku T.



Musí platiť rovnováha momentov síl $M_\mathsf{A} = M_\mathsf{B}$, takže

$$\begin{aligned} M_\mathsf{A} &= M_\mathsf{B} \\ m_\mathsf{A} \cdot g \cdot \frac{1}{4} \cdot \ell &= m_\mathsf{B} \cdot g \cdot \frac{3}{4} \cdot \ell + m_0 \cdot g \cdot \frac{1}{4} \cdot \ell \qquad \Big/ : \ell : g \\ m_\mathsf{A} \cdot \frac{1}{4} &= m_\mathsf{B} \cdot \frac{3}{4} + m_0 \cdot \frac{1}{4} \qquad \Big/ \cdot 4 \\ m_\mathsf{A} &= m_\mathsf{B} \cdot 3 + m_0 \end{aligned}$$

Podľa tohto vzťahu z hmotnosti tyče m_0 a hmotnosti kotúča B na druhej strane ľahko dopočítame maximálnu hmotnosť kotúča A.

Označme m_1 hmotnosť prvého kotúča na ľavej strane, keďže na druhej strane zatiaľ nie je žiaden kotúč, bude $m_1 = 0 + m_0 = 2$ kg. Druhý kotúč bude na pravej strane, jeho hmotnosť bude $m_2 = 3 \cdot m_1 + m_0 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$ kg.

Tretí kotúč bude na ľavej strane, celková maximálna hmotnosť kotúčov na ľavej strane bude $m_3 = 3 \cdot m_2 + m_0 = 26$ kg. Nám však stačí $m_3 = 25$ kg, pričom na ľavej strane už máme $m_1 = 2$ kg, čiže doplníme iba 23 kg.

Štvrtý kotúč dáme na pravú stranu, jeho hmotnosť bude $25 - 8 = 17$ kg, keďže nám stačí činku vyvážiť (keď bude vyvážená, neprevráti sa na žiadnu stranu), hoci by pravá strana uniesla aj oveľa väčšiu váhu kotúča.

Odpoveď na našu otázku teda znie: **Párovčan potrebuje štyri závažia s hmotnosťami** 2 kg, 8 kg, 17 kg a 23 kg.

Poznámky z ťažšej fyziky:

(1) Vypočítané hmotnosti závaží su maximálne, pri ktorých by tyč mala dosiahnuť rovnováhu. V realite by sme mali dať trochu ľahšie kotúče, ale aj tak by sa nám to malo podariť zvládnuť so štyrmi kotúčmi.

(2) Pokiaľ počítame úlohu s nerovnoramennou páku s tyčou, ktorá má nenulovú hmotnosť, musíme myslieť na to, že hmotnosť tyče (teda jej gravitačnú silu) musíme uvažovať v ťažisku. Napadli mi tri spôsoby, ako s ňou počítať:

1. Tyč rozdelíme na dve časti podľa osi otáčania - každú časť potom uvažujeme v jej ťažisku na oboch stranách.

2. Celú tyč uvažujeme v jej ťažisku, teda iba na jednej strane.

3. Úplne si odmyslíme čas tyče, ktorá je na oboch stranách (tá je vyvážená) a budeme uvažovať len odstávajúci koniec tyče - v jej ťažisku.

Všetky tri spôsoby sú ekvivalentné a dostaneme rovnaký výsledok, takže si môžeme vybrať ten, ktorý sa nam najľahšie počíta. Pri riešení tohto príkladu sme si vybrali druhý spôsob.

Bodovanie: *Kompletné a správne riešenie $5\ b$, za menšie chyby $-1\ b$ až $-2\ b$ podľa závažnosti, za správne myšlienky alebo jeden výpočet $1\ b$ až $2\ b$.*

Úloha 3: Papierové rolky - *opravoval Matej Novota – Krtko*
Experimentálne odmeraj, akou najväčšou silou môžeme pôsobiť na zrolovaný kúsok papiera (stojaci ako stĺp), aby sa nepokrčil, alebo nespadol. Vyskúšaj rôzne priemery „stĺpu" z papiera, pričom ich výška bude rovnaká a zostroj graf závislosti sily od priemeru.

Najprv si treba uvedomiť, že zadanie nehovorí aká má byť hrúbka stĺpu. Preto sa dalo pochopiť dvomi spôsobmi.

Hrúbka stĺpu je jedna vrstva

V tomto prípade majú všetky stĺpy rovnakú výšku a hrúbku avšak rôzny priemer.

Stĺp je vytvorený z papieru konštantnej dĺžky

Naopak v tomto prípade majú papieriky, z ktorých stĺpy vyrábame rovnakú dĺžku 21 cm Avšak na výšku. Ale finálne stĺpy majú rôzny priemer. Na výrobu stĺpu sa teda vždy použije rovnaké množstvo materiálu.

Plánovanie experimentu

To aby stĺp držal pokope zabezpečíme pomocou kúsku lepiacej pásky alebo tyčinkového lepidla. Ešte pred tým ako sa pustíme do samotného merania je dobré si premyslieť akú výšku stĺpov použijeme a pre aké priemery to budeme merať. Výšku je ideálne zvoliť takú aby bol stĺp čo najstabilnejší, teda čo najnižšiu. Nechceme však aby bol stĺp príliš nízky, čo by spôsobilo, že si nemusíme všimnúť moment, v ktorom prekročíme jeho nosnosť. Ja som si zvolil výšku 4 cm.

Za priemery stĺpov som si zvolil 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm a 8 cm. Možno sa pýtate prečo som si zvolil tak veľa priemerov. Dôvodom bolo, že chceme namerať nejakú závislosť a čím viacej hodnôt budeme mať, tým ľahšie túto závislosť objavíme.

Pred samotnou realizáciou máme však ešte jednu otázku. Ako merať? Odpovedí je niekoľko. Môžme na stĺp postaviť pohár, do ktorého budeme postupne dolievať vodu, ktorú potom odvážime. Túto možnosť som zvolil aj ja. Aj keď v skutočnosti to nebol vždy pohár ale občas pomerne veľká odmerka :D

Realizácia

Teraz k samotnému pokusu. Najprv si nachystáme naše stĺpy, Z každého typu a veľkosti 5 rovnakých kusov. Následne ich budeme všetky testovať a namerané hodnoty si zapíšeme do tabuľky.

Spracovanie

Keďže z takéhoto množstva čísel veľmi múdry nie sme. Dáta musíme spracovať. Asi nikoho neprekvapí, že pre každý typ a veľkosť stĺpu nás zaujíma iba jedna hodnota a tou je aritmetický priemer. Ten už pre nás má väčší význam. Je to ako keby hodnota nameraná pre priemerný stĺp daného priemeru.

Ešte by nás zaujímalo, ako presne sme merali. Zistíme to vypočítaním odchýlky. Ta hovorí o koľko sa v priemere naše merania líšia. Postup ako ju vyrátame je nasledujúci:

1. Zrátame aritmeticky priemer našich meraní
2. Spravíme rozdiel tohoto priemeru s každou nameranou hodnotou. Na znamienko nebudeme brat ohľad, kedže nás zaujíma iba ako sú od seba tieto hodnoty vzdialene
3. Sprimerujeme tieto hodnoty

Vzorec by vyzeral nasledovne:

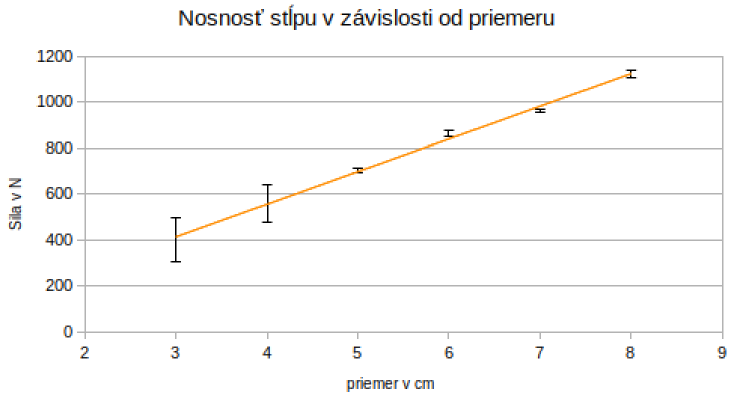
$$\frac{|\text{meranie}_1 - \text{priemer}| + |\text{meranie}_2 - \text{priemer}| + ... + |\text{meranie}_{posledne} - \text{priemer}|}{\text{počet meraní}}$$

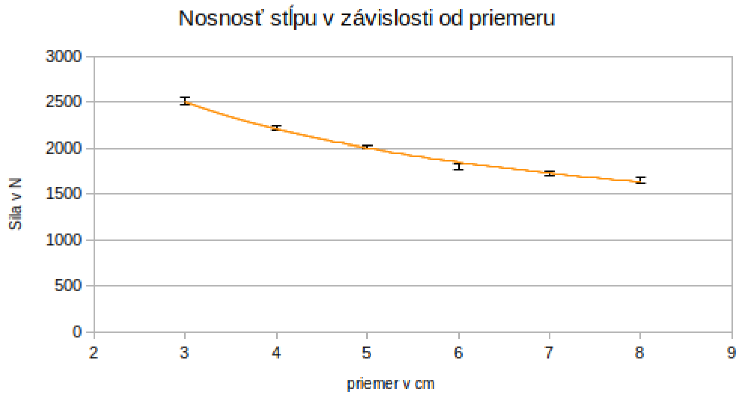
Ukážme si to na príklade.

						Priemer
Sila v N pre priemer rolky 3 cm	482	475	487	253	305	400,4
Odchýlka	81,6	74,6	86,6	147,4	95,4	97,12

Záver

Keď máme dáta spracované môžme vytvoriť grafy a vyvodiť z nich nejaké závery.





Na hornom grafe vidíme, že keď má stĺp hrúbku iba jednej vrstvy je lepšie mať ho čo najširší. Avšak v prípade, že na každý stĺp používame rovnako materiálu, tak čím je stĺp širší[1], tým menšiu priemernú zátaž znesie. Toto môžme vidieť na druhom grafe.

Na záver by som ešte pár slov znova venoval odchýlke. Možno z prvého grafu vidíte, že občas je odchýlka[2] celkom veľká. A teraz prichádza čas zamyslieť sa prečo. Nie všetky stĺpy boli identické, na niektorých mohlo byť viac lepidla alebo papieru. No to čo spôsobilo tieto veľké chyby je skôr moja nešikovnosť. Pretože nameriame celkom iné hodnoty ak sa nám stĺp zlomí a ak sa rozpučí. Môžme si všimnúť, že najväčšie odchýlky sú práve pri úzkych stĺpoch, ktoré sa často lámali.

Bodovanie: *Za popis vášho postupu ste mohli získať* $1\ b$*. Za opakovanie merania pre jednotlivé polomery taktiež* $1\ b$*, ak ste ešte vyrátali priemernú hodnotu dostali ste ďalší* $1\ b$*. Potom ste mohli dostať* $0{,}5\ b$ *za rôzne priemery.* $1\ b$ *za graf a nakoniec* $0{,}5\ b$ *za vyrátanie*

[1] má väčší priemer

[2] odchýlka sú tie čiarky vychádzajúce s tých bodov

alebo zdôvodnenie vašej odchýlky.

Úloha 4: Samodržiaci oblúk - *opravovali Dominika Iždinská, Samuel Kočiščák a Tomáš Švihorík – Šviho*
Ako je možné, že kamenný oblúk udrží záťaž aj bez použitia malty?

Ahoj! Najdôležitejšie pri riešení takéhoto statického problému (problému zaoberajúceho sa nehybným stavom) je uvedomiť si, ako sa môže tento stav (náš stav je, že oblúk drží --- nepadá) narušiť.

Začnime jednoduchším príkladom: zaoberajme sa závažím visiacim na lane. Zaujíma nás, akú veľkú hmotnosť lano udrží, ak budeme postupne pridávať závažie (napríklad dosypávať piesok do vedra na konci lana). Kedy povieme, že lano nevydržalo? Ak sa vedro začne hýbať. To sa stane vtedy a len vtedy, keď sa roztrhne lano, ktoré ho inak drží. Ak chceme vedieť, koľko lano udrží, hľadáme takú najmenšiu hmotnosť, ktorá rozhýbe vedro piesku.

Predstavme si, že naše vedro s pieskom stojí na tehle. Do vedra opäť prisypávame piesok a pozorujeme, čo sa deje. Jediný spôsob, akým môže tehla v tomto vzťahu vedro sklamať je, keď bude vedro tak ťažké, že tehlu rozdrví. Intuícia nám hovorí, že to nebude ľahké dosiahnuť, keď tehly sú robené tak, aby vydržali veľkú silu v tlaku. Aj keď to je triviálne pozorovanie, bolo by hanebné to nespomenúť --- *tehla sa správa inak, ako lano*.

V čom je rozdiel? Ak sa pokúsime urobiť záves (predstav si luster) z tehál spojených maltou, budú sa od seba odtrhávať, taký záves neudrží nič alebo skoro nič --- možno ani seba. Malta (všeobecne, stavebné pojivo) nie je navrhnutá tak, aby udržala silu v ťahu. Má len zabezpečiť, aby sa tehly neposúvali a ležali pevne na sebe --- o nosnosť sa postará to, že je veľmi ťažké ich rozpučiť.

Vráťme sa k nášmu kamennému oblúku. Pre kameň platí to, čo pre tehlu --- je veľmi ťažko rozpučiteľný. Akým spôsobom by mohol oblúk spadnúť? Žiadny z jednotlivých kameňov v oblúku vypadnúť nemôže, pretože je zaseknutý medzi susednými kameňmi a tie sú veľmi pevné, nestlačia sa. Tento oblúk bude držať, pretože kamene sa navzájom podopierajú tak, že žiadny nemôže vypadnúť ako prvý. Aby takýto oblúk spadol, musí sa teda stať niečo s samotnými kameňmi --- tlak na ne musí byť taký veľký, aby to samotné kamene nevydržali a rozpučili sa / rozdrvili sa / popraskali. Je jasné, že je veľmi ťažké rozdrviť kameň, preto je jasné, že je veľmi ťažké preťažiť kamenný oblúk.

Čo sa ale deje so silou? Ak položím bremeno na najvyšší kameň v oblúku, tento začne, vďaka skosenému tvaru, pôsobiť na susedné. Vďaka treniu medzi kameňmi, ktoré ich drží pevne na mieste, je sila takto predávaná z kameňa na kameň až do zeme.

Žiadny kameň nemôže spadnúť prvý, pretože sú si, svojim spôsobom, rovné. Čo ak bude na oblúku výrazná nesymetria (menší kameň, zlom v oblúku)? Práve tá bude slabinou oblúku, v tomto mieste bude pôsobiť iná sila, než vo zvyšku oblúku, teda už bude možné ľahko určiť, ktorý kameň povolí ako prvý. V skutočnosti žiadny oblúk nebude úplne symetrický, už len preto, že neexistujú 2 dokonale totožné kamene. Čím bude nesymetria, na ktorej by mohol oblúk povoliť väčšia, tým menej oblúk vydrží.

Bodovanie: *Za popis toho, ako sú o seba kamene rovnocenne opreté $3\ b$, za popis prenosu sily z vyšších kameňov na nižšie $2\ b$.*

Úloha 5: Drzé odrazy - *opravovala Marianna Hronská*
Postavila sa krásna nová budova, ako na obrázku. Jej vonkajšie steny boli pokryté sklenenými tabuľami, ktoré odrážali slnečné lúče ako zrkadlo. Počas letných horúčav došlo ale k nešťastnému fyzikálnemu divadlu a keď zapadalo slnko, lúče dopadajúce na stenu budovy sa odrazili na niektoré z áut. **Dokresli do obrázka ako sa odrazili slnečné lúče od múzea a na ktoré auto dopadli. Tento obrázok nám pošli spolu so svojím riešením. Nezabudni tiež napísať, prečo sa tieto lúče odrazili práve takto.**

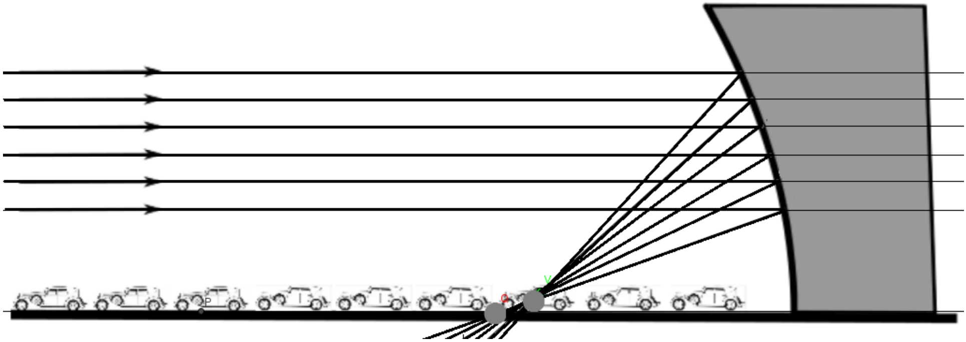
Poďme si rovno povedať, čo vieme o zrkadlách. Pri dopade svetla nastáva jav, ktorý znie: uhol dopadu sa rovná uhlu odrazu. Ako sa ale dá ten uhol určiť, keď máme krivé zrkadlo? Predstavíme si, že krivé nie je. Inak povedané, zoberieme malý kúsok okolo miesta dopadu lúča a povieme si, že to je rovina. Ako dobrá náhrada nám pomôže dotyčnica v bode, kde sa lúč dotýka zrkadla. Potom si už len v bode dopadu narysujeme kolmicu na túto dotyčnicu a lúč preklopíme alebo inak prenesieme daný uhol. Toto opakujeme pre každý lúč a máme výsledok.

Aké to má výhody? Tento postup je úplne všeobecný. To znamená, že sa dá použiť na ľubovoľný tvar zrkadla. Má ale aj dve nevýhody. Zjavne je celkom pracný, lebo pre každý lúč musíme toho celkom dosť narysovať. Druhou nevýhodou je presnosť. Ak totiž budeme veľa rysovať na malom priestore, tak to nemusí vždy dopadnúť úplne presne. Podobne, ak chceme urobiť dotyčnicu na nejakú relatívne hrubú čiaru, tak sa niekoľkostupňovým nepresnostiam nevyhneme. Toto je ale čisto technická presnosť. Samotný postup je presný úplne.

Máme ale ešte jednu možnosť. Pre niektoré tvary totižto presne vieme, ako sa budú rovnobežné lúče správať. Vieme to napríklad pre presne parabolické zrkadlo. Od neho sa lúče rovnobežné s osou odrážajú do ohniska. Stačí teda nájsť parabolu, ktorá dostatočne dobre opisuje tvar nášho mrakodrapu. Potom zistíme jej ohnisko a tam budú smerovať všetky odrazené lúče. Značná výhoda tohoto postupu je, že je relatívne rýchly. Treba si ale uvedomiť, že to naozaj môžeme spraviť, a že sme týmto nahradením nestratili presnosť. Druhá možnosť je nahradiť mrakodrap kružnicou. Tu to ale začne byť trochu komplikovanejšie. Toto nahradenie nám vie pomôcť dvomi spôsobmi. Vieme totiž veľmi ľahko a presne určovať dotyčnice v daných bodoch. Potom stačí zopakovať postup uvedený vyššie.

V škole sa ale učí ešte iná finta, a síce že rovnobežné lúče sa po dopade na guľové zrkadlo odrážajú do ohniska. Problém ale je, že to všeobecne neplatí. Platí to len vtedy, keď má zrkadlo dostatočne veľký polomer a lúče sú blízko optickej osi. To, že sa vo väčšine prípadov používa postup s ohniskom, je kvôli tomu, že je oveľa rýchlejší a stále relatívne presný. Treba na to ale myslieť a strhávala som za to body.

Aký je teda výsledok? Môžeme vidieť, že všetky lúče prechádzajú tretím autom, ale nepretínajú sa v jednom bode. Pre zaujímavosť tam je aj bod, ktorý by sme dostali ak by sme zisťovali ohnisko (ten viac vľavo). Je vidieť, že rozdiel je minimálny, ale je tam.



Bodovanie: *Riešenie, ktoré bolo robené cez uhol odrazu = uhol dopadu dostalo $5\ b$, pokiaľ bolo dobre zdôvodnené. Za nepresnosti rysovania som strhávala maximálne $1{,}5\ b$. Riešenie, ktoré bolo robené cez kružnicu, vedelo dostať $3\ b$, ak nemalo zdôvodnené, že nie je správne alebo chýbalo odôvodnenie nájdenia ohniska, tak som dala $-1\ b$.*

Úloha 6: Ľadotopec - *opravoval Jonáš Dujava*

Ľadoborec široký 6 m sa plaví po mori pokrytom ľadom hrubým 20 cm rýchlosťou $1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Na to, aby sa pri rozrážaní ľadu pohyboval vpred, musí ľadoborec tlačiť vrtuľa silou 300 kN. **Akú minimálnu účinnosť musí mať pohybové ústrojenstvo lode (motor s vrtuľou), aby bolo efektívnejšie ľad prerážať, než všetok ľad v ceste topiť laserom s účinnosťou 100%?**

Aby sme zistili, ako efektívne musí byť pohybové ústrojenstvo lode (aby bolo efektívnejšie ako laser), potrebujeme zistiť výkony potrebné na plavbu pre jednotlivé spôsoby prekonania ľadu.

Výkon (označovaný ako P) je vykonaná práca W za čas t, takže platí

$$P = \frac{W}{t},$$

Pri rozrážaní ľadu silou F po dráhe dĺžky s vykonáme prácu

$$W = Fs,$$

Čím väčšiu silu potrebujeme alebo čím viac ľadu rozbíjame, tým viac práce vykonáme. Výkon potrebný na prerazenie ľadu vieme teraz vypočítať ako

$$P_1 = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = Fv = 300\,\mathrm{kN} \cdot 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 300\,\mathrm{kW},$$

kde sme využili, že pre rýchlosť lode platí $v = \frac{s}{t}$.

Teraz sa pozrime na topenie ľadu laserom. Celá práca, ktorú bude laser konať, sa využije na roztopenie ľadu (predpokladáme teplotu ľadu $0°C$), takže na rozbitie kryštalického usporiadania molekúl, čo si vyžaduje určité teplo (energiu).

Toto teplo sa nazýva skupenské teplo topenia - L_t. Na roztopenie ľadu hmotnosti m potrebujeme

$$L_t = l_t m,$$

kde $l_t = 344\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$ je teplo potrebné na roztopenie $1\,\mathrm{kg}$ ľadu.

Ak sa loď plaví nejaký čas t, tak prejde vzdialenosť $s = vt$. Ak je šírka lode $a = 6\,\mathrm{m}$ a hrúbka ľadu $h = 0{,}2\,\mathrm{m}$, tak za čas t musí laser roztopiť kváder ľadu s objemom

$$V = ahs = ahvt$$

Hmotnosť získame z objemu V vynásobením hustotou ľadu $\rho = 916{,}7\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, takže výkon laseru musí byť

$$P_2 = \frac{W}{t} = \frac{L_t}{t} = \frac{l_t m}{t} = \frac{l_t V \rho}{t} = \frac{l_t ahvt\rho}{t} = l_t ahv\rho = 367413{,}4\,\mathrm{kW}$$

Účinnosť nám určuje pomer spotrebovaného výkonu (príkon) k vykonanému výkonu. Takže pre účinnosť pohybového ústrojenstva platí

$$\eta = \frac{P_v}{P_p},$$

pričom chceme vykonať výkon $P_v = P_1$. Kritická hodnota, kedy prerážanie prestáva byť efektívnejšie je v momente, keď potrebuje na svoj chod rovnaký príkon ako laser, takže keď platí $P_p = P_2$. Finálna hodnota účinnosti je tým pádom

$$\eta = \frac{P_1}{P_2} \approx 0{,}0008165$$

Bodovanie: $1{,}5\ b$ *za vypočítanie výkonu pri prerážaní,* $2{,}5\ b$ *za vypočítanie výkonu laseru,* $1\ b$ *za vypočítanie kritickej účinnosti, za nedostatočne popísaný postup som sťahoval do* $1\ b$

Úloha 7: Rovnováha - *opravoval Bohdan Jóža – Boďo*

Boďo sa hojdal na jednom z troch listov veternej turbíny, ktoré na nej boli pravidelne rozmiestnené. Potom zobral Terkinu tašku a zavesil ju na druhý list, čím turbínu zastavil v rovnovážnej polohe. **Aký uhol bude zvierať list, na ktorom visí Boďo a stĺp turbíny?** Boďo má hmotnosť M, Terkina taška hmostnosť m a list dĺžku l. Trenie pri otáčaní vrtule zanedbajte.

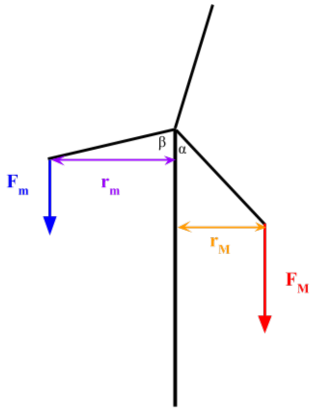
Na úvod by som rád upozornil, že táto úloha sa ukázala matematicky náročnejšia, ako sme predpokladali. Bodovanie som tomu prispôsobil. Napriek tomu sa táto úloha dala vyriešiť aj bez obrovsých matematických znalostí. Potrebné vzorce sa často dajú veľmi ľahko nájsť na internete. V tomto prípade sa dokonca dajú obísť pomocou geometrie.

Matematické riešenie

Boďo aj taška pôsobia na svoje listy svojou tiažovou silou. Na Boďov list pôsobí sila $F_\mathrm{M} = M \cdot g$, kde g je tiažové zrýchlenie. Obdobne na list s taškou pôsobí sila $F_\mathrm{m} = m \cdot g$. Obe tieto sily budú pôsobiť kolmo dole, rovnobežne so stĺpom, a budú mať otáčavý účinok na vrtuľu. Mieru otáčavého účinku sily vyjadruje moment sily. Moment sily F vo vzdialenosti r od osi otáčania je $M = F \cdot r$. Keď bude vrtuľa v rovnováhe, momenty oboch našich síl sa budú musieť rovnať, lebo pôsobia proti sebe a žiadne iné sily nemajú otáčavý účinok na vrtuľu.

Zdá sa, že sme vyhrali. Máme obe sily pôsobiace na vrtuľu, aj ich ramená, teda listy vrtule dĺžky l. Stačí nám teda rovnica $F_{\text{m}} \cdot l = F_{\text{M}} \cdot l$, nie? Nie, nestačí. Rovnica momentu sily totiž platí iba vtedy, keď sila pôsobí kolmo na svoje rameno. V našom prípade však tiažové sily pôsobia na listy vrtule pod nejakým uhlom. Máme teda 2 možnosti riešenia: buď prispôsobíme silu, aby bola kolmá na list alebo prispôsobíme list, aby bol kolmý na silu.

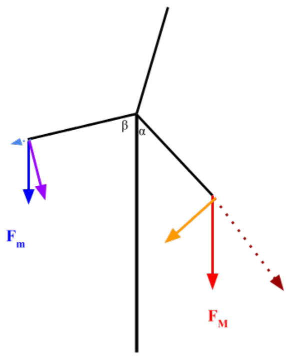
Začneme druhou možnosťou. Povedzme, že chceme tiažové sily nechať tak a chceme iba zistiť pre každú silu veľkosť ramena, na ktoré v skutočnosti pôsobí. Keďže rameno musí byť na silu kolmo, jeho veľkosť bude kolmý priemet listu vrtule na silu, teda kolmá vzdialenosť pôsobiska sily os osi otáčania. Nazvime uhol medzi listom s taškou β. List vrtule, kolmý priemet a kus stĺpa budú tvoriť pravouhlý trojuholník. Keďže list je prepona, kolmý priemet bude mať veľkosť $r_{\text{m}} = sin(\beta) \cdot l$. Moment tejto sily bude potom $M_{\text{m}} = F_{\text{m}} \cdot r_{\text{m}} = m \cdot g \cdot sin(\beta) \cdot l$ Na druhej strane stĺpa máme taký obdobný trojuholník, len tam bude iný uhol, nazvime ho α. Kolmý priemet listu s Boďom bude $r_{\text{M}} = sin(\alpha) \cdot l$ a moment Boďovej tiažovej sily bude $M_{\text{M}} = F_{\text{M}} \cdot r_{\text{M}} = M \cdot g \cdot sin(\alpha) \cdot l$ Keďže tieto momenty sa musia rovnať, dostávame rovnicu



$$M_{\text{m}} = M_{\text{M}}$$
$$m \cdot g \cdot sin(\beta) \cdot l = M \cdot g \cdot sin(\alpha) \cdot l$$

Predtým, ako budeme počítať ďalej, si ukážeme druhú možnosť. Tu chceme nájsť časti oboch tiažových síl, ktoré pôsobia kolmo na list. To urobíme tak, že si sily vhodne rozložíme.

Rozložíme si ich tak, ako na obrázku. Jedna časť sily pôsobí kolmo na list, druhá rovnobežne s listom. Každá sila, ktorej vektor pôsobenia prechádza cez otáčania, má nulový moment. Preto tá, ktorá pôsobí rovnobežne s listom nebude mať na otáčanie vrtule žiadny vplyv. Vidíme, že kolmá sila, rovnobežná sila a pôvodná tiažová sila tvoria znova pravouhlý trojuholník. Pôvodná sila je prepona a kolmá sila leží oproti uhlu, takže kolmá časť Boďovej tiažovej sily bude $F_{\text{kM}} = sin(\alpha) \cdot F_{\text{M}}$ a kolmá časť tiažovej sily tašky bude $F_{\text{km}} = sin(\beta) \cdot F_{\text{m}}$. Momenty budú



$$M_{\text{M}} = F_{\text{kM}} \cdot l = M \cdot g \cdot sin(\alpha) \cdot l$$

$$M_{\mathsf{m}} = F_{\mathsf{km}} \cdot l = m \cdot g \cdot sin(\beta) \cdot l$$

Keď dáme momenty do rovnosti, dostávame rovnakú rovnicu, ako pri prvom postupe:

$$M_{\mathsf{m}} = M_{\mathsf{M}}$$

$$m \cdot g \cdot sin(\beta) \cdot l = M \cdot g \cdot sin(\alpha) \cdot l$$

$$m \cdot sin(\beta) = M \cdot sin(\alpha)$$

Tu máme dva neznáme uhly, no iba jednu rovnicu. Zo zadania však vieme, že vrtuľa má v pravidelných rozostupoch umiestnené 3 listy. To znamená, že medzi každými dvoma listami je rovnaký uhol. Všetky dokopy musia byť $360°$, lebo tvoria dokopy celý kruh a každý z nich je potom jedna tretina. Čiže každá medzera medzi listami má uhol $120°$. Z toho vyplýva, že $\alpha + \beta = 120°$. Odtiaľ si vyjadríme $\beta = 120° - \alpha$ a dosadíme do prvej rovnice.

$$m \cdot sin(120 - \alpha) = M \cdot sin(\alpha)$$

$sin(120° - \alpha)$ vieme rozložiť na $sin(120°) \cdot cos(\alpha) - cos(120°) \cdot sin(\alpha)$. Dosadíme teda do rovnice:

$$m \cdot [sin(120°) \cdot cos(\alpha) - cos(120°) \cdot sin(\alpha)] = M \cdot sin(\alpha)$$

Nahradíme známe sínusy a kosínusy číslami. $sin(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos(120°) = -\frac{1}{2}$:

$$m \cdot \left(\frac{\sqrt{3} \cdot cos(\alpha)}{2} - \frac{-sin(\alpha)}{2}\right) = M \cdot sin(\alpha)$$

$$m \cdot \left(\frac{\sqrt{3} \cdot cos(\alpha) + sin(\alpha)}{2}\right) = M \cdot sin(\alpha)$$

$$m \cdot \left(\sqrt{3} \cdot cos(\alpha) + sin(\alpha)\right) = 2 \cdot M \cdot sin(\alpha)$$

$$m \cdot \left(\sqrt{3} \cdot cos(\alpha) + sin(\alpha)\right) = 2 \cdot M \cdot sin(\alpha)$$

$$m \cdot \sqrt{3} \cdot cos(\alpha) = (2 \cdot M - m) \cdot sin(\alpha)$$

$$\sqrt{3} \cdot m = (2 \cdot M - m) \cdot \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

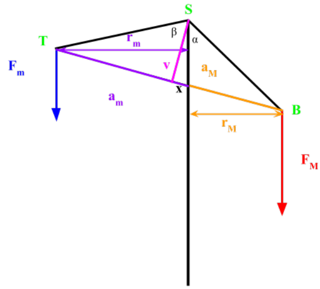
$$\sqrt{3} \cdot m = (2 \cdot M - m) \cdot tan(\alpha)$$

$$tan(\alpha) = \frac{\sqrt{3} \cdot m}{2 \cdot M - m}$$

$$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3} \cdot m}{2 \cdot M - m}\right)$$

Geometrické riešenie

Nazvime stred vrtule S, bod s taškou T a boď s Boďom B. STB je potom rovnoramenný trojuholník s ramenami dĺžky l. Jeho základňu nazveme d. Oproti stĺpu je však vychýlený, ako na obrázku. Dokreslíme si jeho výšku v, ktorá je kolmá na stranu TB a delí ju na dve rovnaké časti. Stĺp však túto stranu nemusí deliť na dve rovnaké časti. Platí:



$$a_{\mathrm{m}} = \frac{d}{2} + x$$

$$a_{\mathrm{M}} = \frac{d}{2} - x$$

Podľa rovnosti momentov musí platiť $F_{\mathrm{m}} \cdot r_{\mathrm{m}} = F_{\mathrm{M}} \cdot r_{\mathrm{M}}$. Toto si môžeme upraviť na $\frac{F_{\mathrm{m}}}{F_{\mathrm{M}}} = \frac{r_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{m}}}$. Trojuholník tvorený stranami r_{m} a a_{m} a trojuholník tvorený stranami r_{M} a a_{M} sú si podobné, lebo majú rovnaké uhly. Tým pádom pomer strán $\frac{r_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{m}}}$ je rovnaký, ako pomer strán $\frac{a_{\mathrm{M}}}{a_{\mathrm{m}}}$. Môžeme ho teda v rovnici nahradiť:

$$F_{\mathrm{m}} \cdot a_{\mathrm{m}} = F_{\mathrm{M}} \cdot a_{\mathrm{M}}$$

Vidíme, že a_{m} a a_{M} musia dať dokopy d, čiže si ho jednoducho rozdelia v pomere $\frac{F_{\mathrm{m}}}{F_{\mathrm{M}}} = \frac{m}{M}$. Takže

$$a_{\mathrm{M}} = d \cdot \frac{m}{m + M}$$

Strany v, $\frac{d}{2}$ a l tvoria pravouhlý trojuholník, keďže v je kolmá na d. Ale to nieje len taký obyčajný pravouhlý trojuholník, jeho zvyšné uhly sú $60°$ a $30°$, čiže sa jedná o polovicu rovnostranného trojuholníka, čiže v je polovica jeho strany a $\frac{d}{2}$ je jeho výška, ktorú si vieme dopočítať cez pytagorovu vetu. Odtiaľ:

$$v = l/2$$

$$\frac{d}{2} = \sqrt{3}l/2$$

V obrázku ďalej vidíme, že uhol, ktorého veľkosť chceme zistiť je $60°$ mínus uhol, ktorý zvierajú v a stĺp. A tu sa už bez goniometrie nezaobídeme, ale stačí nám vedieť, že keď do tan^{-1} hodíme pomer protiľahlej a priľahlej odvesny k nejakému uhlu, dostaneme ten uhol. Už len nájsť nejaký vhodný pravouhlý trojuholník. v, x a kus stĺpa tvoria presne pravouhlý trojuholník, ktorý potrebujeme. Označme uhol, zovretý v a stĺpom β, potom táto β má veľkosť:

$$\beta = tan^{-1}\left(\frac{x}{v}\right)$$

Máme všetko potrebné, pretože veľkosť x si vieme zrátať ako rozdiel $\frac{d}{2}$ a a_{M}, už len všetko podosádzať:

$$\beta = tan^{-1}\left(\frac{\frac{d}{2} - a_{\mathrm{M}}}{l/2}\right) = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}l/2 - 2 \cdot \sqrt{3}l/2 \cdot \frac{m}{m+M}}{l/2}\right)$$

vykrátime $l/2$ a následne dáme na spoločného menovateľa:

$$\beta = tan^{-1}\left(\sqrt{3} - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{m}{m+M}\right) = tan^{-1}\left(\sqrt{3}\cdot\frac{m+M-2m}{m+M}\right) = tan^{-1}\left(\sqrt{3}\cdot\frac{M-m}{m+M}\right)$$

A keď máme uhol β už si len spomenieme, že sme si povedali, že $\alpha = 60° - \beta$ a teda:

$$\alpha = 60° - tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}\cdot(M-m)}{(m+M)}\right)$$

čo na prvý pohľad vyzerá ináč, než výsledok získaný matematickým spôsobom, ale v skutočnosti sú tieto dva výsledky totožné.

Bodovanie: $1\ b$ *za úvahu o 120°,* $3\ b$ *za vyjadrenie momentov a* $1\ b$ *za dopočítanie a výsledok.*