Vzorové riešenia 3. série zimnej časti

Úloha 1: Lodná MHD - *opravovala Zuzana Bogárová – Bum*
Kubovi napadlo, že by mohol hore-dole Dunajom premávať MHD čln. Vyšlo mu, že jeho novej linke by 30 km cesta v jednom smere trvala 2 h, zatiaľ čo v druhom až 3 h. **Aká by bola rýchlosť MHD člnu? Akú rýchlosť prúdu Dunaja Kubo predpokladá?**

Ahojte. Tento príklad sa dal riešiť aj komplikovanejším aj jednoduchým spôsobom. Oba prístupy sú správne, ale kedže tým komplikovanejším som to riešila iba ja, tak sem napíšem to jednoduchšie.

Najskôr si zapíšme, čo vieme zo zadania. Poznáme vzdialenosť, ktorú bude MHD čln chodiť $s = 30\,\mathrm{km}$. Poznáme čas, za ktorý prejde túto vzdialenosť jedným smerom $t_1 = 2\,\mathrm{h}$. A poznáme aj čas, v ktorom ju prejde opačným smerom $t_2 = 3\,\mathrm{h}$. Potrebujeme zistiť rýchlosť člnu $v_č =?$ a rýchlosť Dunaja $v_\mathrm{D} =?$. Tak ideme na to.

Vieme, za aký čas prejde čln obe trasy, tak si môžeme vypočítať rýchlosť člnu vzhľadom na pevninu.

$$v_1 = \frac{s}{t_1}$$

$$v_1 = \frac{30\,\mathrm{km}}{2\,\mathrm{h}} = 15\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$v_2 = \frac{s}{t_2}$$

$$v_2 = \frac{30\,\mathrm{km}}{3\,\mathrm{h}} = 10\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Keď loď pláva po smere rieky, rýchlosť člnu a Dunaja sa sčitujú. Ak pláva loď proti prúdu rieky, tieto rýchlosti sa odčitujú. Z toho vyplýva že, $v_1 = v_č + v_\mathrm{D} = 15\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ a $v_2 = v_č - v_\mathrm{D} = 10\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Z tohto môžeme vidieť, že:

$$v_1 = v_2 + 5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$v_č + v_\mathrm{D} = v_č - v_\mathrm{D} + 5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$v_č - v_č + v_\mathrm{D} + v_\mathrm{D} = 5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$2 \cdot v_\mathsf{D} = 5\,\frac{\mathsf{km}}{\mathsf{h}}$$

$$v_\mathsf{D} = \frac{5\,\frac{\mathsf{km}}{\mathsf{h}}}{2} = 2{,}5\,\frac{\mathsf{km}}{\mathsf{h}}$$

Teraz to dosadíme aby sme zistili aj $v_\mathsf{č}$.

$$v_1 = v_\mathsf{č} + v_\mathsf{D}$$

$$v_\mathsf{č} = v_1 - v_\mathsf{D}$$

$$v_\mathsf{č} = 15\,\frac{\mathsf{km}}{\mathsf{h}} - 2{,}5\,\frac{\mathsf{km}}{\mathsf{h}} = 12{,}5\,\frac{\mathsf{km}}{\mathsf{h}}$$

Tak sme sa dostali k výsledkom, rýchlosť člnu MHD je $v_\mathsf{č} = 12{,}5\,\frac{\mathsf{km}}{\mathsf{h}}$ a rýchlosť Dunaja je $v_\mathsf{D} = 2{,}5\,\frac{\mathsf{km}}{\mathsf{h}}$.

Bodovanie: *Ak ste sa dopracovali k správnemu výsledku rýchlosti lode dostávate $1\ b$, tak isto ak ste správne vypočítali rýchlosť Dunaja - $1\ b$. Keď ste opísali, ako ste sa týmto výsledok dostali - $2\ b$. Keď ste správne uviedli, že ak pláva loď po prúde, rýchlosti lode a Dunaja sa sčitujú, a ak pláva proti prúde tak sa odčitujú, dostali ste $1\ b$.*

Úloha 2: Čierni pasažieri - *opravovali Tomáš Proks a Michaela Leinwatherová – Myšel*
Jeden účastník si vo vlaku zo sústredenia niesol balónik naplnený vodou a vedúcim zostal balónik na šnúrke naplnený héliom. Keď sa vlak začal v stanici rozbiehať, balóniky sa vo vlaku začali hýbať. Pohyb balónov účastníci spozorovali aj keď vlak pred Bratislavou začal brzdiť. **Do ktorých smerov sa pohli vodný a héliový balónik keď sa vlak rozbiehal a do ktorých smerov sa pohli keď začal brzdiť?**

Určite si už niekedy šiel autom či autobusom a poznáš ten pocit, keď šofér prudko zabrzdí, či sa rýchlo rozbehne. Prečo Ťa to vlastne hodí dopredu, alebo dozadu? Predmety radi zostávajú v pokoji, keď sa nehýbu. Alebo keď už sa hýbu, chcú sa hýbať naďalej – chcú ostať v tomto stave pohybu. Túto vlastnosť nazývame zotrvačnosť. Čím je predmet ťažší, tým viac bude odporovať snahe zmeniť jeho pohybový stav. Poďme sa pozrieť, čo sa deje s balónikmi:

Pred rozbehom vlaku bol vodný balónik v pokoji. Keď sa vlak rozbieha, zrýchľuje. Balónik chce zostať v pokoji, na svojom pôvodnom mieste (z pohľadu stanice). Keďže vlak ale ide dopredu, zotrvačnosťou sa balónik posunie oproti vlaku dozadu.

Vlak v ďalšej stanici prudko zabrzdí. Balónik sa stále snaží ostať v jeho pôvodnom stave – v pohybe dopredu, teda sa odgúľa k prednej časti vlaku.

Môžeme si všimnúť, že v oboch prípadoch sa balónik hýbe proti smeru zrýchlenia (spomaľovať znamená totiž „zrýchľovať dozadu“.

Ako sa bude správať héliový balónik? Poďme sa najprv pozrieť na to, prečo héliový balónik stúpa hore. Molekuly vzduchu sú hustejšie ako molekuly hélia, teda sú priťahované k zemi viac. Vzduch klesá dolu, vytvorí tak miesto s väčším tlakom pod héliovým balónikom a tlačí ho hore. Uletí Ti, keď ho pustíš. Neuletel by však až do vesmíru. Vzduch by ho vytlačil do atmosféry, zhruba do výšky 32 kilometrov, kedy by sa tlak v okolí balónika vyrovnal.

Všimnime si, že balónik síce tiež chce ísť dole, ale tým že sú molekuly vzduchu hustejšie vytlačia ho nahor.

Ako všetko, čo má hmotnosť, tak aj vzduch vo vlaku má zotrvačnosť. Keď vlak zrýchli, molekuly vzduchu sa pohnú rovnako, ako zavesený vodný balónik počas zrýchlovania – natlačia sa do zadnej časti vlaku. Vytvoria tam tak miesto s väčším tlakom, ktorý vytlačí héliový balónik dopredu. Balónik sa teda pohne v smere zrýchlenia. Pri spomaľovaní sa bude diať presný opak. Čiastočky vzduchu chcú ostať v pohybe, presunú sa do prednej časti vlaku a vytlačia balón dozadu.

Héliový balónik sa síce tiež chce hýbať proti smeru zrýchlenia, ale vzduch má vyššiu hustotu, takže z úplne toho istého dôvodu, prečo mu vzduch nedovolí spadnúť na zem, mu nedovolí ani toto.

Tento jav môžeš pozorovať aj Ty, keď najbližšie pocestuješ autom, či vlakom! A to ani nepotrebuješ so sebou nosiť balóniky – postačí Ti obyčajná plastová fľaška naplnená vodou. Nie však po okraj, nechaj v nej trošku vzduchu. Fľašku drž vodorovne, hrdlom v smere jazdy. Keď vlak zrýchli, voda sa natlačí dozadu a vytlačí vzduchovú bublinu v smere zrýchlenia. Pri spomaľovaní sa opäť bude diať presný opak.

(Myšel to skúsila, video nájdete tu:)

Skús sa zamyslieť, ako by sa správali balóniky, keby šiel vlak do zákruty. Veľa radosti pri cestovaní! :)

Bodovanie: $0 - 2\ b$ *za popísanie zotrvačnosti a pohybu vodného balónika;* $0 - 2\ b$ *za skutočnosť, že hélium je redšie ako vzduch, teda sa bude správať opačne a* $1\ b$ *ste mohli získať za popísanie situácie pri spomaľovaní*

> **Úloha 3: Neobyčajná** - *opravovali Nina Hanesová a Marek Laheye*
> Filip a Adam si chladia čaj. Adam svoju šálku s čajom položí von na podobločnicu (vonkajšia teplota vzduchu je 3 ℃). Filip svoju šálku s čajom ponorí do hrnca so studenou vodou (teplota studenej vody je 17 ℃). **Experimentálne zisti, ktorý z čajov skôr dosiahne teplotu 30 ℃.**

Na experiment budeme potrebovať: dve rovnaké šálky, dva teplomery (ja som použil liehový - najlepšie je použiť taký, čo môžeme vo vode nechať celý čas a nemusíme ho zakaždým zapínať), vodu, niečo, čím vodu ohrejeme (kanvicu, platničku, ...) a nádobu v ktorej bude náš vodný kúpeľ.

Postup: Najskôr nameriame teplotu vonkajšieho prostredia (na podobločnici, na balkóne,...) a uistíme sa, že je nad bodom mrazu. Presvedčíme sa, že aj teplota našej studenej vody je naozaj 17 ℃, poprípade si do meraní zapíšeme inú teplotu. Zohrejeme vodu na čaj a do oboch nádob nalejeme rovnaké množstvo horúcej vody (ja som si vždy nalial 75 ml). Jednu šálku vyložíme na podobločnicu, druhú vložíme do vodného kúpeľa tak, aby sa voda nenaliala do šálky a zapneme stopky. Stopky zastavíme, keď čaj dosiahne teplotu 30 ℃ . Zapíšeme si náš nameraný čas. Meranie opakujeme viackrát, aby boli naše celkové výsledky čo najpresnejšie.

Moje merania:

Teplota vodného kúpeľa: 18 ℃ Teplota vonku: 1 ℃

Prostredie	1	2	3	4	5	Priemer
Vodný kúpeľ	2:31	2:35	2:21	2:43	2:28	2:32
Vonku	12:42	13:06	13:25	13:09	12:58	13:04

Čaj vo vodnom kúpeli vychladol rýchlejšie

Vysvetlenie: Na prvý pohľad by sa nám mohlo zdať, že nakoľko je vzduch chladnejší, mal by sa v ňom čaj ochladiť rýchlejšie. Ale rozoberme si podrobnejšie, čo sa tu vlastne deje. Z pozorovania je nám jasné, že muselo dôjsť k výmene tepla, presnejšie prechodu tepla z „čaju“, cez steny hrnčeka, až do studenej vody/studeného vzduchu. Ako sa vlastne tento prechod tepla uskutočňuje? Keďže teplo je forma **kinetickej energie**, jednoduché kmitanie častíc, nebude sa prenášať nijako inak, ako vzájomnými zrážkami častíc. Každá látka je však iná, má iné **častice** a **vzdialenosti medzi nimi (hustotu)**. Samozrejme, čím je látka hustejšia, tým viac častíc má na hranici s inou látkou, a teda viac častíc môže prijať túto kinetickú energiu. Keďže vzduch má menšiu hustotu ako voda, bude mať na rozhraní menej častíc, ktoré by vedeli prijať teplo. Teraz už vieme, že každá látka vedie teplo inak. Túto schopnosť nazývame **tepelná vodivosť**. Každý materiál má aj svoj **koeficient tepelnej vodivosti**, podľa ktorého opisujeme ako dobre vedie teplo. Z tabuliek vieme vyčítať, že vzduch má oveľa menší koeficient tepelnej vodivosti ako voda. Týmto sme si ukázali, čo už bolo dávno známe: **Vzduch je dobrý tepelný izolant!** Práve preto sa aj často využíva v stavebníctve.

Ale zamyslime sa ešte raz. Chápeme, že vonku fúkal vetrík a takto **odvádzal ohriaty vzduch preč od hrnčeka** a privádzal nový studený vzduch pre ďalšiu výmenu tepla. Ale pri studenej vode sme nemali žiaden „vetrík“, ktorý by nám pomohol odviať ohriatu vodu a priviať novú, studenú. Ako je teda možné, že sa voda nezohriala na teplotu vyššiu ako 30 ℃ a tým nezabránila ochladeniu čaju na 30 ℃ (teploty vody a „čaju“ sa vyrovnali)? A tu do hry vstupuje **merná tepelná kapacita**, ktorá nám hovorí, koľko tepla musí teleso s nejakou hmotnosťou prijať (prípadne odovzdať), aby sa jeho teplota zvýšila (alebo znížila) o požadovanú hodnotu. Z tabuliek vieme vyčítať, že tepelná kapacita vody je $4{,}182\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\ ℃}$ a tepelná kapacita vzduchu je $1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\ ℃}$. Z toho vyplýva, že množstvo tepla, ktoré musíme dodať tomu istému množstvu vody a vzduchu, aby sa ich teplota zvýšila o jeden stupeň, je približne $4{,}18$**-krát väčšie** pre vodu, ako pre vzduch. To znamená, že kým sa voda ohreje o 1 ℃, vzduch sa ohreje o $4{,}16$ ℃. Teda vďaka svojej **vysokej tepelnej kapacite** dokáže voda odobrať „čaju“ dostatok tepla, aby ho ochladila na 30 ℃ predtým, ako by sama dosiahla teplotu vyššiu ako 30 ℃ a výmena tepla by sa tým pádom zastavila. (Samozrejme, musíme mať v hrnci dostatok vody. Táto podmienka je ale splnená, ak zoberieme rozumne veľký hrniec a nalejeme doňho vodu tak, aby jej hladina bola vo výške hladiny čaju).

Bodovanie: *Popis postupu* - $1\ b$, *Realizácia experimentu* - $1\ b$, *Opakovanie merania* - $0{,}5\ b$, *Zápis nameraných hodnôt* - $0{,}5\ b$, *Presnosť merania* - $0{,}5\ b$, *Tvrdenie, že sa čaj vo vode ochladí rýchlejšie* - $0{,}5\ b$, *Odôvodnenie výsledkov merania* - $1\ b$.

Úloha 4: Kvargľa - *opravovali Martin Svetlík – Panda a Barbora Čemanová*
Kvargľa mala na každej strane dve sedadlá a predné bolo o 40 cm bližšie ku stredu ako zadné. Celkovú dĺžku ale nevieme. Prišli 4 deti, a posadili sa na ňu - na ľavej strane bol Ferko, ktorý má 50 kg a za ním Jožko, ktorý má 60 kg, a na pravej strane bol Miško, ktorý má 75 kg a za ním Anička, ktorá má 40 kg. A čuduj sa svete, boli krásne v rovnováhe. **Aká je vzdialenosť prvej sedačky od stredu kvargle?**

Na začiatok je potrebné uvedomiť si, že kvargľa je vlastne dvojramenná **páka** s osou otáčania v strede, takže obe jej ramená sú rovnako dlhé. Deti, ktoré na kvargli sedia majú nejakú hmotnosť. To znamená, že každý z nich pôsobí na kvargľu nejakou silou. Jej veľkosť sa rovná tiažovej sile, ktorou sú deti ťahané k Zemi. Tiažovú silu každého dieťaťa vypočítame ako súčin jeho hmotnosti a gravitačného zrýchlenia:

$$F_{\text{g Ferko}} = m_{\text{Ferko}} \cdot g = 50\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 490{,}5\,\text{N}$$

$$F_{\text{g Jožko}} = m_{\text{Jožko}} \cdot g = 60\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 588{,}6\,\text{N}$$

$$F_{\text{g Miško}} = m_{\text{Miško}} \cdot g = 75\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 735{,}75\,\text{N}$$

$$F_{\text{g Anička}} = m_{\text{Anička}} \cdot g = 40\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 392{,}4\,\text{N}$$

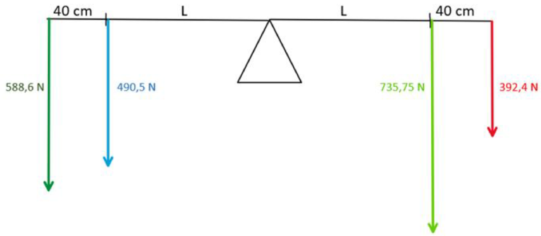
Nestačí nám ale poznať iba veľkosť sily, ktorou deti na kvargľu pôsobia. Potrebujeme poznať aj miesto, v ktorom pôsobia touto silou. Toto miesto sa volá **pôsobisko sily**. Určite ste si už niekedy všimli, že nie je jedno, do ktorej časti dverí tlačíte. Pri kľučke to napríklad ide oveľa ľahšie ako pri pántoch. Nás teda bude zaujímať aj veľkosť sily, ale aj miesto, v ktorom táto sila pôsobí. To popisuje veličina **moment sily**, ktorý vypočítame ako súčin veľkosti sily a dĺžky ramena páky, čiže vzdialenosť pôsobiska tejto sily od osi otáčania.

$$M = F \cdot r$$

Páka – kvargľa bude v rovnováhe, ak sa moment sily na jednej strane bude rovnať momentu sily na druhej strane. Keďže na každej strane sedia dve deti, na každej strane pôsobia dve rôzne veľké sily v dvoch rôznych vzdialenostiach. V tomto prípade sa musí súčet momentov sily na jednej strane rovnať súčtu momentov na druhej strane.

$$M_1 + M_2 = M_3 + M_4$$

Vieme, že sedadlá boli od seba vzdialené 40 cm. Označme si vzdialenosť od stredu k prvému sedadlu L. Celková dĺžka ramena bude potom L+40 cm.



Túto rovnosť súčtu momentov na jednej aj druhej strane páky môžeme popísať rovnicou:

$$M_1 + M_2 = M_3 + M_4$$

$$F_1 \cdot r_1 + F_2 \cdot r_2 = F_3 \cdot r_3 + F_4 \cdot r_4$$

$$F_{\text{g Ferko}} \cdot L + F_{\text{g Jožko}} \cdot (L + 40\,\text{cm}) = F_{\text{g Miško}} \cdot L + F_{\text{g Anička}} \cdot (L + 40\,\text{cm})$$

Všimnime si, že jediná veličina, ktorú nepoznáme, je vzdialenosť bližšieho sedadla od stredu, čiže vzdialenosť L. Všetky ostatné premenné máme buď zadané, alebo si ich vieme vypočítať.

$$m_{\text{Ferko}} \cdot g \cdot L + m_{\text{Jožko}} \cdot g \cdot (L + 40\,\text{cm}) = m_{\text{Miško}} \cdot g \cdot L + m_{\text{Anička}} \cdot g \cdot (L + 40\,\text{cm})$$

Keďže tiažové zrýchlenie je v každom člene na oboch stranách, môžeme ho vykrátiť. Po úprave potom bude rovnica vyzerať takto:

$$m_{\text{Ferko}} \cdot L + m_{\text{Jožko}} \cdot (L + 40\,\text{cm}) = m_{\text{Miško}} \cdot L + m_{\text{Anička}} \cdot (L + 40\,\text{cm})$$

Dosadíme hmotnosti detí a dĺžky ramien (vzdialenosť sedadiel, na ktorých sedia, od stredu):

$$50\,\text{kg} \cdot L + 60\,\text{kg} \cdot (L + 40\,\text{cm}) = 75\,\text{kg} \cdot L + 40\,\text{kg} \cdot (L + 40\,\text{cm})$$

$$50\,\text{kg} \cdot L + 60\,\text{kg} \cdot L + 24\,\text{kg m} = 75\,\text{kg} \cdot L + 40\,\text{kg} \cdot L + 16\,\text{kg m}$$

$$110\,\text{kg} \cdot L + 8\,\text{kg m} = 115\,\text{kg} \cdot L$$

$$8\,\text{kg m} = 5\,\text{kg} \cdot L$$

$$1{,}6\,\text{m} = L$$

Prvá sedačka bola od stredu kvargle vzdialená $1{,}6$ m.

Bodovanie: *za princíp fungovania kvargle (páka)* 1 b*, za rovnosť momentov sily na pravej a ľavej strane* 2 b*, za výpočet* 2 b*, za numerické chyby sme strhávali* $0{,}5$ b

Úloha 5: Vzdušný biliard - *opravovali Sára Bánovská a Martin Lauko – Logik*
Dežko si hádže loptičky a v tom mu napadne, že červenú loptičku vyhodí hore do výšky $80\,\mathrm{m}$, a modrú vyhodí tak, aby sa zrazila s červenou, ktorá bude v tom čase už padať dole. **Aká bola počiatočná rýchlosť červenej loptičky ak sa do najvyššieho bodu dostala presne za $4\,\mathrm{s}$? Ako dlho bude červenej loptičke trvať, kým sa zrazí s modrou loptičkou, ak zrážka nastane $45\,\mathrm{m}$ od najvyššieho bodu červenej loptičky? Aká musí byť počiatočná rýchlosť modrej loptičky, ak zrážka nastala $3{,}5\,\mathrm{s}$ po jej vyhodení?**

Ako na začiatku každého fyzikálneho problému si zhrnieme, čo sme sa dozvedeli v zadaní:
$h = 80\,\mathrm{m}$
$t_{max} = 4\,\mathrm{s}$
$h_{zrazka} = 45\,\mathrm{m}$ (pre modrú loptičku nastala zrážka $80\,\mathrm{m} - 45\,\mathrm{m} = 35\,\mathrm{m}$ nad zemou)
$t_{modra} = 3{,}5\,\mathrm{s}$

Podotázka 1:

Aká bola počiatočná rýchlosť v_0, ak sa loptička dostala do najvyššieho bodu (h) za $4\,\mathrm{s}$? V študijnom texte máme uvedený vzorec, ktorý dáva do vzťahu práve dráhu a čas, ktoré máme zadané, a počiatočnú rýchlosť, ktorá nás zaujíma:

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Všimnime si znamienko -, keďže zrýchlenie pôsobí opačne ako rýchlosť. Keďže rovnicu už máme zostavenú, dosadíme známe veličiny a vyrátame v_0

$$80\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{s} \cdot v_0 - \frac{1}{2} 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} (4\,\mathrm{s})^2$$

$$80\,\mathrm{m} + \frac{1}{2} 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} 16\,\mathrm{s}^2 = 4\,\mathrm{s} \cdot v_0$$

$$\frac{80\,\mathrm{m} + 80\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{s}} = v_0$$

$$v_0 = 40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Správny výsledok prvej pod-otázky, je teda $40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Taktiež bolo časté riešenie cez vzťah $v = v_0 - at$. Tu by riešenie vyzeralo nasledovne: Vieme, že finálna rýchlosť v maximálnej výške je $0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Preto rozdiel počiatočnej rýchlosti a súčinu zrýchlenia a času tiež musí byť $0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. A teda:

$$0 = v_0 - 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} 4\,\mathrm{s}$$

$$v_0 = 40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Podotázka 2:

Červená loptička má vo svojom najvyššom bode nulovú rýchlosť, a preto v tomto prípade bude vzťah, ktorý použijeme: $s = \frac{1}{2}gt^2$. Od tohto bodu je našou úlohou už len dosadiť hodnoty do rovnice a správne vypočítať neznámu.

$$45\,\mathrm{m} = \frac{1}{2}10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t^2$$
$$\frac{2 \cdot 45\,\mathrm{m}}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = t^2$$
$$9\,\mathrm{s}^2 = t^2$$
$$t = 3\,\mathrm{s}$$

Nesmieme však zabudnúť, na čo sa otázka vlastne pýta. Pýtame sa na celkový čas, ktorý je loptička vo vzduchu, a preto k ceste do bodu zrážky musíme pripočítať cestu smerom hore: $3\,\mathrm{s} + 4\,\mathrm{s} = 7\,\mathrm{s}$. Správna odpoveď je teda $7\,\mathrm{s}$.

Podotázka 3:

Vieme, že výška, ktorú modrá loptička musela prekonať je $35\,\mathrm{m}$ (zrážka nastala $45\,\mathrm{m}$ od najvyššieho bodu červenej loptičky, ktorý sa nachádzal v $80\,\mathrm{m}$ -> loptičky sa tým pádom zrazili v $35\,\mathrm{m}$ nad zemou). Tým pádom použijeme rovnaký vzťah ako v prvej pod otázke, dosádzame a riešime.

$$35\,\mathrm{m} = 3{,}5\,\mathrm{s} \cdot v_0 - \frac{1}{2}10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(3{,}5\,\mathrm{s})^2$$
$$35\,\mathrm{m} + \frac{1}{2}10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(3{,}5\,\mathrm{s})^2 = 3{,}5\,\mathrm{s} \cdot v_0$$
$$\frac{35\,\mathrm{m} + 61{,}25\,\mathrm{m}}{3{,}5\,\mathrm{s}} = v_0$$
$$v_0 = 27{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

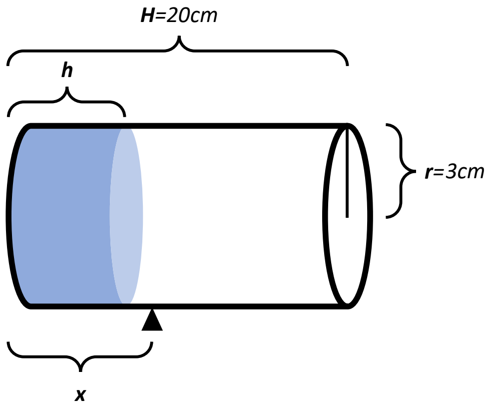
Aby sme splnili všetky zadané parametre, loptičku sme museli vyhodiť rýchlosťou $27{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Bodovanie: *Úloha je rozdelená na 3 podotázky, z čoho za každú ste mohli získať $1{,}5\ b$ bodu ($0{,}5\ b$ za správny vzťah; $0{,}5\ b$ za správnu úpravu rovnice; $0{,}5\ b$ za komentár a vysvetlenie riešenia). $0{,}5\ b$ bodu sa taktiež dáva, ak sú všetky výsledky správne.*

Úloha 6: Suvenír - *opravoval Patrik Drozdík*
Plechovku si predstavte ako dutý valec s hmotnosťou $20\,\mathrm{g}$, výškou $10\,\mathrm{cm}$ a polomerom podstavy $3\,\mathrm{cm}$. **Nakresli graf závislosti spoločného ťažiska plechovky a vody v nej od výšky hladiny v plechovke. Svoj graf popíšte a zdôvodnite.**

Plechovku považujme za dokonalý valec a ignorujme teda napríklad to, že na vrchu je nejaký otvor na pitie či ľubovoľné iné nerovnomernosti. Ťažisko plechovky samotnej by sa teda nachádzalo presne v jej strede. Keď v nej bude naliata voda do ľubovoľnej výšky, ťažisko sa stále bude nachádzať na zvislici prechádzajúcej jej stredom, takže zistiť musíme už len to, v akej výške sa bude nachádzať.

Predstavme si, že si plechovku položíme naležato a voda zostane na presne tom istom mieste, akoby zamrzla. Ťažisko plechovky nájdeme tak, že nájdeme bod, pod ktorým by sme plechovku museli podložiť, keby sme ju chceli vybalansovať napríklad na prste. Vzdialenosť tohoto bodu od dna plechovky si označme x (pozri obrázok).



Plechovka s vodou bude v rovnováhe, keď sa bude rovnať veľkosť momentu sily vody a momentu sily samotného tela plechovky. Zapíšme si teda presne toto do rovnice:

$$(x-\frac{h}{2})\cdot g\cdot \rho_{\text{Voda}}\cdot h\cdot \pi\cdot r^2=(\frac{H}{2}-x)\cdot g\cdot M$$

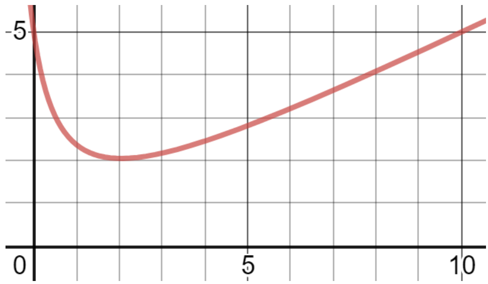
Môžete si všimnúť, že tu som ešte všetko napísal všeobecne, takže za polomer podstavy plechovky si dosadíme $r=3$ cm, za výšku plechovky si dosadíme $H=20$ cm, za hmotnosť plechovky si dosadíme $M=20$ g a aby sa nám jednoduchšie počítalo, tak ako hustotu vody použime $\rho_{\text{Voda}}=1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ a tiažové zrýchlenie môžeme hneď vykrátiť, takže to je jedno. Po dosadení známych hodnôt a vykrátení tiažového zrýchlenia dostávame:

$$(x-\frac{h}{2})\cdot 1\cdot h\cdot \pi\cdot 9=(5-x)\cdot 20$$

Z čoho úpravami vyjadríme x:

$$x=\frac{4{,}5\cdot \pi\cdot h^2+100}{9\cdot \pi\cdot h+20}$$

No a keďže x je výška ťažiska od spodnej podstavy plechovky, stačí nám už len zadať túto rovnicu do nejakého šikovného programu, ktorý nám z nej nakreslí graf, napríklad môžeme použiť desmos.com:



Graf závislosti výšky ťažiska nad spodnou podstavou (zvislá os) od výšky hladiny kvapaliny nad spodnou podstavou (vodorovná os)

Na záver ešte upozorním, že graf som zámerne orezal tak, že vidíme len hodnoty výšky kvapaliny h od 0 cm do 10 cm. Je to preto, lebo v našom prípade by h s hodnotou mimo tohoto rozmedzia nedávalo zmysel, keďže výška hladiny vody nemôže byť menšia ako 0 a ani väčšia ako je výška plechovky.

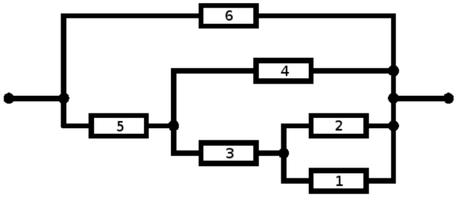
Bodovanie: *sem popíš systém* b*-ovania*

Úloha 7: Kôpka nešťastia - *opravovali Jakub Hluško – Kubo a Lucia Tóthová – Lucy*
Majme kôpku elektrických rezistorov, všetky označené ako rezistor s odporom $1\,\Omega$. Jeden z rezistorov v kôpke je však pokazený a má odpor úplne iný, než by mal mať. Na koľko meraní ohmmetrom viete zistiť, ktorý z rezistorov je pokazený, ak z nich môžete pred každým meraním vytvoriť zapojenie? **Vymysli spôsob, ako spoznať pokazený rezistor v kôpke 7 rezistorov na 3 merania aj ty? Zvládneš to aj na menej, ako 3 merania?**

Nájsť Tomášovo **riešenie na tri merania** nie je vôbec zložité - zapojíme najskôr 4 rezistory do série. Ak nenameriame odpor 4, je medzi nimi i ten chybný; inak je v neváženej trojici. Horší prípad teda nastane, ak po prvom meraní budeme jednoznačne vedieť o štyroch rezistoroch, medzi ktorými je jeden pokazený. V druhom meraní odmeriame dva rezistory, čím určíme, v ktorej dvojici je pokazený a tretím meraním už iba vyberieme pokazený rezistor z dvojice, v ktorej je a to zmeraním hodnoty odporu jedného z nich.

Šimonovo **riešenie na dve merania** bude o čosi zložitejšie - najskôr si pre prehľadnosť rezistory očíslujme. V prvom meraní si zapojíme do série, teda za seba, rezistory s číslami 2 až 7. Ak sme namerali odpor 6, pokazený je rezistor číslo 1. Inak vieme, že rezistor 1 je dobrý, teda má odpor $1\,\Omega$. A na ohmmetri vidíme odpor sériovo zapojených piatich jednoohmových rezistorov a jedného pokazeného, povedzme, že má odpor $z\,\Omega$, teda nameriame $(5+z)\,\Omega$, z čoho jednoducho vypočítame z, teda hodnotu elektrického odporu pokazeného rezistora, i keď ešte nevieme, ktorý zo šiestich to je.

Druhé meranie je trochu trikové - zapojíme si odpory rovnako, ako obrázku nižšie.



Trikom, ktorý nám pomohol objaviť toto zapojenie je, že žiadne dva rezistory nie sú zapojené rovnako - každý má v obvode inú polohu a keby sme ktorékoľvek dva vymenili, odpor obvodu by sa zmenil (za predpokladu, že rezistory by boli rôzne). My takto zapojíme šesť z našich siedmich rezistorov, z toho rezistor číslo 1 s odporom známym, $1\,\Omega$.

Teraz si stačí uvedomiť, že ak by bol rezistor s odporom $z\,\Omega$ na rôznom mieste, namerali by sme rôzny odpor. Napríklad ak by bol z-ohmový rezistor 7, odpor schémy by sme vedeli vypočítať postupne, po malých kúskoch. Ako myšlienka riešenia by to stačilo, no my si nedáme pokoja a overíme si platnosť tejto myšlienky aspoň na niekoľkých prípadoch. Vieme, že odpor dvoch sériovo zapojených rezistorov je súčtom ich odporov, teda $R = R_1 + R_2$. Pre paralelne zapojené odpory zas platí, že prevrátená hodnota ich odporu je súčtom prevrátených hodnôt ich odporov a teda $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Pre dva rezistory (pozor, pre viac nie!) dokonca platí i zjednodušený vzťah - $R = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$.

Pomocou týchto pravidiel poľahky zistíme, že odpor rezistorov 1, 2 a 3 je spolu $R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$, čo po dosadení hodnoty odporu $1\,\Omega$ dá $1\,\Omega + \frac{1\,\Omega \cdot 1\,\Omega}{1\,\Omega+1\,\Omega} = 1\,\Omega + \frac{1}{2}\,\Omega = \frac{3}{2}\,\Omega$. Zámerne sa vyhýbajme desatinným číslam - v tomto momente sú zlomky podstatne estetickejšie, ako bude vidieť o chvíľu neskôr. K odporu $\frac{3}{2}\,\Omega$ máme teda paralelne pripojený rezistor 4 a k tomu následne sériovo rezistor 5. Skúsme vypísať rovno vzorce s dosadenými hodnotami: $1\,\Omega + \frac{1\,\Omega \cdot \frac{3}{2}\,\Omega}{1\,\Omega + \frac{3}{2}\,\Omega} = 1\,\Omega + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}\,\Omega = 1\,\Omega + \frac{3}{5}\,\Omega = \frac{8}{5}\,\Omega$. A pri paralelnom pripojení rezistora číslo 6 bude odpor $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_{12345}} = \frac{1}{1\,\Omega} + \frac{1}{\frac{8}{5}\,\Omega} = (1 + \frac{5}{8})\frac{1}{\Omega} = \frac{13}{8}\frac{1}{\Omega}$, teda hodnota odporu R bude $\frac{8}{13}\,\Omega$. Teraz vidno, ako sa nám pri prevracaní zišli zlomky. A ak si kladiete otázku, čo tam robilo $\frac{1}{\Omega}$, tak ta treba pozrieť na to, že napríklad $\frac{1}{3\,\Omega} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\Omega}$. Zistili sme teda, že ak by chybný rezistor bol číslo 7, teda mimo druhého merania, nameraný odpor by bol $\frac{8}{13}\,\Omega$.

Chceli sme si však ukázať, čo by sa stalo, keby bol pokazený rezistor niekde v schéme. Keďže výpočtov je to pomerne dosť, vypočítajme porovnajme si napríklad hodnoty odporu schémy s pokazeným rezistorom na pozíciách 4 a 6. Vieme, že odpor rezistorov 1, 2 a 3 je $\frac{3}{2}\,\Omega$. Teraz paralelne pripojíme odpor $z\,\Omega$ a k tomu sériovo $1\,\Omega$. Teda dostaneme $1\,\Omega + \frac{\frac{3}{2}\,\Omega \cdot z\,\Omega}{\frac{3}{2}\,\Omega + z\,\Omega} = \frac{5z+3}{2z+3}\,\Omega$ a po pripojení posledného, jednoohmového rezistora paralelne dostaneme $\frac{3z+5}{7z+6}\,\Omega$. Áno, použité úpravy vôbec neboli jednoduché, ale treba si uvedomiť, že s konkrétnou hodnotou odporu pokazeného rezistora by sa to počítalo omnoho jednoduchšie. Keď dostanete niekedy upraviť niečo podobné, nebojte sa na to použiť softvér ako napríklad WolphamAlpha.

Ak bude rezistor s odporom $z\,\Omega$ na pozícii 6, tak z minulého výpočtu vieme, že odpor prvých piatich rezistorov v tomto zapojení bude $\frac{8}{5}\,\Omega$ a po paralelnom zapojení pokazeného rezistora sa zníži na $\frac{8z}{5z+8}\,\Omega$.

Metóda hľadania pokazeného rezistora na dve merania teda existuje - najskôr zmeriame, aký má odpor a jeden z rezistorov bezpečne určíme ako jednoohmový, potom za pomoci zistenej hodnoty odporu pokazeného rezistora a odmeranej hodnoty odporu schémy z obrázka mierne obťažnejším výpočtom zistíme polohu pokazeného rezistora v schéme.

Bodovanie: *riešenia, ktoré našli spôsob na 3 merania:* $1\ b$ *za nájdenie spôsobu,* $2\ b$ *za správne odôvodnenie (max.* $3\ b$*),*

riešenia, ktoré našli spôsob na 2 merania: $2{,}5\ b$ *za nájdenie spôsobu,* $2{,}5\ b$ *za správne odôvodnenie.*